This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

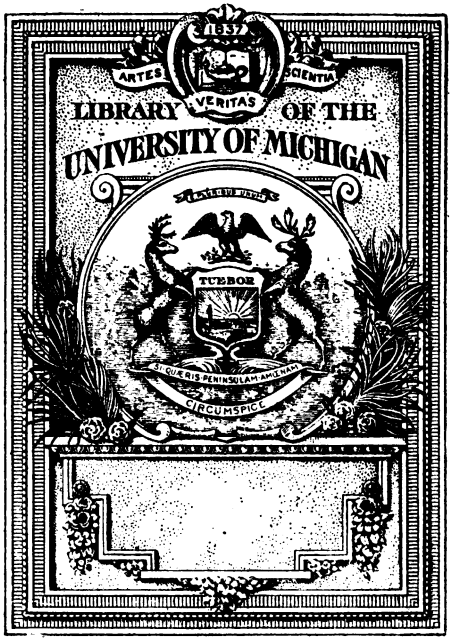
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

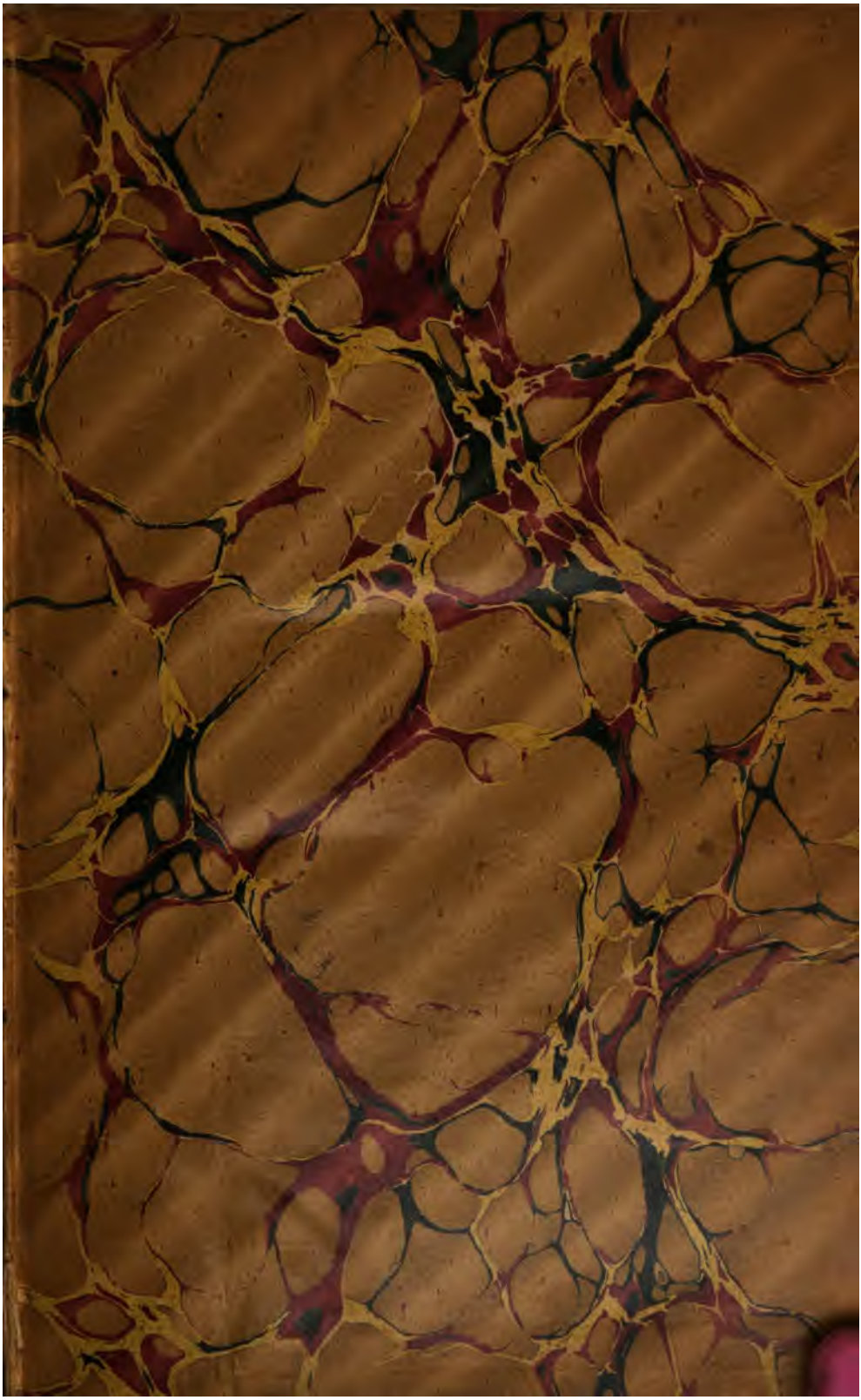
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET



QA
809
.J94
1866

L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons, soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait dans le cours de 1866, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Gauthier Villars

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine Saint-Germain, 10, près l'Institut.

203

4.4

PROBLÈMES

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE

DISPOSÉS

POUR SERVIR D'APPLICATIONS AUX PRINCIPES ENSEIGNÉS
DANS LES COURS

PAR LE P. M. JULLIEN,
DE LA COMPAGNIE DE JÉSUS.

Omnia in mensura, et numero, et pondere
disposuisti.. quoniam tanquam momentum
stateræ sic est ante te orbis terrarum.
SAP. XI, 21, 23.

DEUXIÈME ÉDITION.

TOME PREMIER.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1866

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

Alex. Zivet
gt.
8-31-1922
2 vols.

27 Oct 22 E.H.W.
7-11-37 Ellis

AVERTISSEMENT.

Tous ceux qui s'adonnent à l'étude des Sciences mathématiques savent assez qu'une théorie peut rarement être saisie dans tous ses détails, si on ne l'applique à de nombreux exemples. Aussi, des hommes distingués qui se sont consacrés en France à l'enseignement des Sciences exactes ont eu soin de présenter à la jeunesse des Recueils de Problèmes sur les différentes branches des Mathématiques. Ces Recueils nous manquent presque entièrement pour la Mécanique rationnelle, et cependant cette science est peut-être la plus féconde en applications utiles et intéressantes.

C'est pour combler cette lacune, autant qu'il est en moi, que j'ai écrit cet ouvrage. Je parcours une à une les questions qui font l'objet des Cours ordinaires, en conservant autant que possible l'ordre le

406370

plus généralement suivi. Après avoir rappelé brièvement les formules générales données par la théorie, et consacré quelques lignes à l'historique de la question, je résous avec détails une suite de Problèmes, choisis de manière à présenter les différents genres d'applications; ensuite je propose une seconde série de Problèmes, en général plus simples, et dont le résultat est seulement indiqué. La plupart de ces Problèmes sont extraits d'Auteurs célèbres ou de journaux modernes; les sources premières sont citées toutes les fois qu'elles sont parvenues à ma connaissance. Néanmoins, le plus souvent les questions ne sont pas résolues à la manière des Auteurs cités, car je me suis attaché surtout à suivre de point en point les méthodes générales telles qu'on les enseigne aujourd'hui, tout en usant des simplifications propres à chaque question. Dans le choix des Problèmes, j'ai préféré ceux qui m'ont paru plus instructifs par leurs applications pratiques, ou par les développements théoriques auxquels ils donnent lieu. Tous les résultats indiqués ont été vérifiés avec soin.

Quelques Problèmes proposés n'exigent que les premiers principes de la Mécanique et des calculs élémentaires. Les Professeurs des Cours inférieurs les distingueront aisément, et pourront les proposer à leurs élèves.

Les jeunes gens désireux d'étudier plus à fond les

théories enseignées brièvement dans les Cours trouveront dans cet ouvrage, je l'espère, plusieurs développements utiles, qui leur faciliteront la lecture des grands maîtres.

Dans tout ce travail, deux ouvrages anglais publiés sur le même sujet par M. William Walton (*) ont été pour moi des sources fécondes où j'ai largement puisé.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma reconnaissance à M. J. Bertrand, qui a bien voulu m'aider d'indications utiles et me communiquer un travail intéressant sur l'attraction.

(*) *A Collection of Problems in illustration of the principles of theoretical Mechanics*, 1842. — *A Collection of Problems in illustration of the principles of theoretical Hydrostatics and Hydrodynamics*, 1847.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVERTISSEMENT V

STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

CENTRES DE GRAVITÉ. 1

SECTION I. — Surfaces planes symétriques par rapport à une droite 2

SECTION II. — Surfaces planes quelconques 7

SECTION III. — Solides de révolution 11

SECTION IV. — Solides quelconques 15

SECTION V. — Courbes planes 20

SECTION VI. — Courbes à double courbure 22

SECTION VII. — Surfaces de révolution 23

SECTION VIII. — Surfaces quelconques 25

Enveloppe d'une sphère. — Surfaces sphériques. — Enveloppe de la surface engendrée par une chaînette.

SECTION IX. — Corps hétérogènes 32

SECTION X. — Composition des forces parallèles. — Centre des forces parallèles. — Centre de gravité des polygones et des polyèdres 34

Théorèmes sur le tétraèdre. — Horloge magique. — Polygones circonscrits. — Polyèdres circonscrits.

SECTION XI. — Théorème de Guldin 42

Généralisation.

CHAPITRE II.

ÉQUILIBRE D'UN POINT MATÉRIEL. 47

SECTION I. — Équilibre sans frottement. — Attraction 48

Poids portés par des fils. — Attraction d'une demi-sphère. — Solide de plus grande attrac-

Pages.

tion. — Propriétés spéciales de la loi de la nature. — Attraction des polygones et des polyèdres, etc.

SECTION II. — Équilibre avec frottement 67

Point matériel sur un plan incliné, sur un cercle.

CHAPITRE III.

ÉQUILIBRE D'UN SEUL CORPS. 75

SECTION I. — Équilibre sans frottement 76

Tige dans diverses circonstances. — Porte dont les gonds ne sont pas situés sur une même verticale. — Théorèmes de M. Chasles; généralisation de Möbius. — Forces normales appliquées à tous les éléments d'une surface fermée, etc.

SECTION II. — Équilibre avec frottement 94

Tige dans diverses circonstances. — Lame carrée ou rectangulaire. — Cylindre elliptique appuyé sur deux plans, etc.

SECTION III. — Poussée des terres 100

Plus grande pente d'un talus. — Profil du terrain qui est partout à la limite de stabilité. — Plan de rupture. — Centre de poussée.

CHAPITRE IV.

ÉQUILIBRE DE PLUSIEURS CORPS. 113

SECTION I. — Équilibre sans frottement 113

Assemblage des trois couteaux. — Sphères placées entre deux plans inclinés. — Sphères placées dans l'intérieur d'une sphère creuse, d'un cylindre creux. — Cylindres liés par un fil. — Tiges dans diverses circonstances, etc.

SECTION II. — Équilibre avec frottement 119

Sphère pressée entre deux plans mobiles. — Chariot posé sur un plan incliné. — Arcanseur-cale. — Arc-boutement des engrenages.

Pages.

SECTION III. — Équilibre des systèmes articulés. — Polygone funiculaire 124

Systèmes articulés. — Théorème de Fuss. — Ponts suspendus. — Combles de charpente, etc.

CHAPITRE V.

ÉQUILIBRE D'UN FIL FLEXIBLE. 135

SECTION I. — Conditions générales de l'équilibre d'un fil flexible et inextensible 136

SECTION II. — Fil sollicité par des forces parallèles 139

Fil d'épaisseur variable; connaissant la répartition de la masse, déterminer la courbe, et réciproquement. — Fil posé sur deux supports. — Fil reposant en partie sur un plan. — Chaînette d'égale résistance. — Chaînette dont la pression sur les supports est un minimum, etc.

SECTION III. — Fil sollicité par des forces centrales 155

Fil attiré vers un centre fixe en raison inverse du carré de la distance. — Chaînette d'égale résistance, etc.

SECTION IV. — Fil placé sur une courbe fixe 163

Tension. — Frottement, etc.

SECTION V. — Équilibre d'un fil élastique 167

Allongement produit par le poids du fil. — Chaînette élastique. — Équilibre indifférent de deux poids réunis par un fil et posés sur deux courbes, etc.

CHAPITRE VI.

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES. 176

SECTION I. — Équilibre 179

Attraction. — Équilibre de trois points dont les distances varient dans un même rapport. — Équilibre indifférent d'une tige posée sur une courbe et appuyée contre un plan ver-

Pages.

tical. — Centre de gravité. — Attraction de *n* points proportionnelle à la distance. — Ponts-levis, etc.

SECTION II. — Stabilité de l'équilibre 191

Problème des moindres distances. — Tige appuyée sur deux plans. — Lame carrée portée par un fil. — Point matériel attiré vers deux centres. — Solides de révolution, etc.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DU MOUVEMENT

ET

CINÉMATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE FORME INVARIABLE. 204

Centre instantané de rotation. — Mouvement le plus général d'un corps solide. — Théorèmes de M. Chasles sur les mouvements infiniment petits d'un corps solide, etc.

CHAPITRE II.

APPLICATIONS A LA GÉOMÉTRIE, AUX SYSTÈMES ARTICULÉS ET AUX ENGRENAGES. 223

Tangentes. — Normales. — Rayons de courbure. — Développées. — Description mécanique des courbes. — Bielles. — Parallélogramme de Watt. — Coulisse de Stéphenson. — Engrenages plans, à lanterne, à flanc, à épicycloïde, à développantes de cercle. — Formule de Savary. — Joint de Cardan, etc.

DYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Pages.

CHOC DE SPHÈRES HOMOGÈNES SANS FROTTEMENT. 251

Hypothèse sur l'élasticité.— Questions de maximum. — Choc oblique. — Perte de force vive. — Chocs successifs de plusieurs sphères, etc.

CHAPITRE II.

MOUVEMENT RECTILIGNE D'UN POINT MATÉRIEL. 264

SECTION I. — Mouvement dans le vide 266

Point attiré par un ou plusieurs centres fixes, par les parois d'un tube, par un disque, par un centre en mouvement. — Mouvement de deux mobiles qui s'attirent. — Rencontre de deux mobiles, leur plus courte distance, etc.

SECTION II. — Mouvement dans un milieu résistant..... 280

Mouvement dans une atmosphère non homogène. — Détermination de la force d'après la nature connue du mouvement. — Bonds successifs d'une bille élastique. — Mouvement produit par l'attraction d'un centre en mouvement, etc.

CHAPITRE III.

MOUVEMENT QUELCONQUE D'UN POINT MATÉRIEL LIBRE. 292

SECTION I. — Forces situées dans un même plan et dirigées d'une manière quelconque..... 292

Mouvement des projectiles— Connaissant la trajectoire et la direction de la force, déterminer cette force.— Mouvement uniforme sous l'action de deux centres. — Mouvement produit par une force dirigée vers un centre en mou-

Pages.

vement. — Remarques sur les solutions imaginaires. — Bonds successifs d'une bille élastique, etc.

SECTION II. — Forces centrales 311

Mouvement d'un point matériel retenu par un fil élastique. — Confirmation de la loi de Newton, tirée de la lenteur du mouvement des périhélies. — Théorème de Lambert et théorème analogue. — Développement de la plus grande équation du centre. — Propriétés diverses du mouvement dans les sections coniques. — Spirales. — Lemniscate. — Épicycloïde. — Changement subit de la force. — Hypothèse de Clairaut sur la loi de la nature. — Plusieurs centres, etc.

SECTION III. — Mouvement dans un milieu résistant..... 346

Courbe balistique dans un milieu dont la résistance est $a + bv^n$. — Connaissant la trajectoire et la force, déterminer la résistance, et réciproquement, etc.

CHAPITRE IV.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL ASSUJETTI A DES LIAISONS. 358

SECTION I. — Mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une courbe fixe et plane 358

Petites oscillations. — Déterminer la courbe de manière que le mouvement satisfasse à des conditions données. — Courbe isochrone. — Propriétés de la cycloïde. — Courbe paracentrique isochrone. — Propriétés de la lemniscate. — Courbes tautochrones pour une force dirigée vers un centre fixe, pour une force de direction constante. — Courbes synchrones. — Courbes brachistochrones pour une force dirigée vers un centre fixe. — Problème analogue à celui de la tractoire. — Propriétés du mouvement circulaire. — Courbe sur laquelle la vitesse angulaire du rayon vecteur est constante. — Pentagone. — Hyperbole et cercle, etc.

Pages.

SECTION II. — Pression exercée sur une courbe plane par un point matériel en mouvement..... 402

Cas où la pression est inversement proportionnelle au rayon de courbure. — Courbe d'égale pression. — Déterminer la courbe de manière que la pression satisfasse à des conditions données. — Théorème relatif au mouvement libre, etc.

SECTION III. — Mouvement d'un point matériel sur une courbe plane dans un milieu résistant..... 414

Pendule cycloïdal. — Pendule circulaire. — Courbes tautochrones pour une résistance proportionnelle au carré de la vitesse. — Expression la plus générale de la force tangentielle dans le mouvement tautochrone. — Courbes tautochrones avec frottement dans un milieu résistant. — Déterminer la courbe de manière que le mouvement satisfasse à des conditions données, etc.

SECTION IV. — Mouvement d'un point matériel sur une surface fixe..... 443

Mouvement sur une surface de révolution. — Étant donnée la courbe que doit décrire un point pesant placé sur une surface, déterminer la surface. — Courbes brachistochrones sur une surface.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

PROBLÈMES

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

CENTRES DE GRAVITÉ.

Il est dans chaque corps solide un point fixe par lequel passe la résultante des actions de la pesanteur sur les différentes molécules, quelle que soit la position de ce corps. Ce point est le *centre de gravité*.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires ou obliques d'un point du corps dont on cherche le centre de gravité, dm l'élément de masse situé en ce point, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ les coordonnées du centre de gravité.

On a les formules

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm}, \quad \bar{y} = \frac{\int y\,dm}{\int dm}, \quad \bar{z} = \frac{\int z\,dm}{\int dm},$$

Nous devons l'idée du centre de gravité à Archimède. Ce géomètre a déterminé le centre de plusieurs surfaces planes dans l'ouvrage intitulé : Ἐπιπέδων ἰσορροπικῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων.

SECTION I.

SURFACES PLANES SYMÉTRIQUES PAR RAPPORT A UNE DROITE.

Prenons des axes coordonnés rectangulaires ou obliques, et considérons une aire plane comprise entre deux ordonnées et deux arcs de courbes, dont les ordonnées y correspondantes à une même abscisse x soient égales et de signe contraire. L'abscisse $\bar{x}$ du centre de gravité de cette aire est donnée par la formule

$$\bar{x} = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx},$$

où les limites des intégrales sont les abscisses correspondantes aux ordonnées extrêmes.

Si l'on veut employer les coordonnées polaires, alors, en désignant par r la distance d'un point de la surface à l'origine, et par θ l'angle que forme le rayon r avec l'axe des x, on aura

$$\bar{x} = \frac{\int\int r^2 \cos\theta\,d\theta\,dr}{\int\int r d\theta\,dr}.$$

Les intégrales s'étendent à toute la surface considérée.

1. *Déterminer le centre de gravité de l'aire comprise entre la cissoïde de Dioclès et son asymptote.*

L'équation de la cissoïde est

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x};$$

par conséquent,

$$\bar{x} = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx} = \frac{\int_0^a \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{a-x}}\,dx}{\int_0^a \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-x}}\,dx}.$$

Or

$$\int_0^a \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{a-x}}\,dx = -\left[2x^{\frac{5}{2}}\sqrt{a-x}\right]_0^a + 5\int_0^a x^{\frac{3}{2}}\sqrt{a-x}\,dx$$

$$= 5\int_0^a x^{\frac{3}{2}}\sqrt{a-x}\,dx$$

$$= 5a\int_0^a \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-x}}\,dx - 5\int_0^a \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{a-x}}\,dx$$

$$= \frac{5}{6}a\int_0^a \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-x}}\,dx;$$

donc

$$\bar{x} = \frac{5}{6}a.$$

2. *Déterminer le centre de gravité d'un secteur de cercle.*

Soient a le rayon du cercle et 2α l'angle du secteur. Prenons le centre pour origine des coordonnées, et la bissectrice de l'angle du secteur pour axe des x.

Nous avons

$$\bar{x} = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx} = \frac{\int_0^{a\cos\alpha} x^2 \operatorname{tang}\alpha\,dx + \int_{a\cos\alpha}^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{\int_0^{a\cos\alpha} x \operatorname{tang}\alpha\,dx + \int_{a\cos\alpha}^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3}x^3\operatorname{tang}\alpha\right)_0^{a\cos\alpha} - \left[\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{a\cos\alpha}^a}{\left(\frac{1}{2}x^2\operatorname{tang}\alpha\right)_0^{a\cos\alpha} + \left(\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}\right)_{a\cos\alpha}^a}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}a^3\sin\alpha\cos^2\alpha + \frac{1}{3}a^3\sin^3\alpha}{\frac{1}{2}a^2\sin\alpha\cos\alpha + \frac{1}{2}(a^2\alpha - a^2\sin\alpha\cos\alpha)} = a\,\frac{2}{3}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Les intégrations sont plus simples lorsqu'on emploie les coordonnées polaires.

Alors

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_{0}^{a} r^2 \cos\theta \, d\theta \, dr}{\int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_{0}^{a} r \, d\theta \, dr} = \frac{\frac{1}{3} a^3 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\theta \, d\theta}{\frac{1}{2} a^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta}$$

$$= \frac{2}{3} a \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3} \frac{\text{rayon} \times \text{corde}}{\text{arc}}.$$

CARRÉ, *Mesure des surfaces*, p. 76.

3. *Déterminer le centre de gravité d'un segment de cercle.*

Conservons la notation du problème précédent.

Nous avons

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_{a\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}}^{a} r^2 \cos\theta \, d\theta \, dr}{\int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_{a\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}}^{a} r \, d\theta \, dr}$$

$$= \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{3} a^3 \left(1 - \frac{\cos^3\alpha}{\cos^3\theta}\right) \cos\theta \, d\theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{2} a^2 \left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}\right) d\theta}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} a^3 \Big[\sin\theta - \cos^3\alpha \operatorname{tang}\theta\Big]_{-\alpha}^{+\alpha}}{\frac{1}{2} a^2 \Big[\theta - \cos^2\alpha \operatorname{tang}\theta\Big]_{-}^{+\alpha}}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} a^3 \sin^3\alpha}{a^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)} = \frac{2}{3} a \frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}.$$

Les intégrations seront peut-être plus rapides si l'on prend les coordonnées rectilignes.

Alors

$$\bar{x} = \frac{\int_{a\cos\alpha}^{a} x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx}{\int_{a\cos\alpha}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx} = \frac{-\left[\frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{a\cos\alpha}^{a}}{\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}\right]_{a\cos\alpha}^{a}}$$

$$= \frac{2}{3}a\,\frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = \frac{(\text{corde})^3}{6\,(\text{rayon.arc} - \text{apothème.corde})}.$$

GULDIN, *Centrobaryca*, lib. I, cap. IX, p. 107.

On peut arriver à ce résultat par une simple composition de forces parallèles, en considérant le secteur dont on connaît le centre de gravité (*Prob.* 2) comme la somme d'un triangle et d'un segment.

4. *Déterminer le centre de gravité de l'aire comprise entre un arc de parabole et sa corde.*

Si l'on nomme a la longueur d'une parallèle à l'axe de la parabole menée par le milieu de la corde et terminée à la courbe, on a

$$\bar{x} = \frac{3}{5}a.$$

ARCHIMÈDE, Ἐπιπέδων..., lib. II, prop. 8.

5. *Déterminer le centre de gravité de l'aire comprise entre la parabole*

$$ay^{2n} = x^m$$

et une double ordonnée

Si l'on désigne par x l'abscisse qui correspond à l'ordonnée extrême, on a

$$\bar{x} = \frac{m + 2n}{m + 4n}x.$$

6. *Déterminer le centre de gravité de l'aire circonscrite par la courbe*

$$y^2 = b^2\frac{a - x}{x}.$$

On trouve

$$\bar{x} = \frac{1}{4} a.$$

7. *Déterminer le centre de gravité de l'aire comprise entre une branche entière de cycloïde et sa base.*

Si l'on prend la tangente au sommet pour axe des y, et l'axe de la courbe pour axe des x, que l'on nomme a le rayon du cercle générateur et ω l'angle dont tourne le cercle quand il décrit l'arc compris entre l'origine et le point xy, la courbe est représentée par les équations

$$x = a(1 - \cos\omega),$$
$$y = a(\omega + \sin\omega);$$

et l'on trouve

$$\bar{x} = \frac{7}{6} a.$$

8. *Déterminer le centre de gravité de l'aire comprise entre une ellipse et l'un de ses diamètres.*

Si l'on prend le diamètre donné pour axe des y, le diamètre conjugué pour axe des x, et qu'on représente par $2a$ la longueur de ce second diamètre, on trouve

$$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}.$$

GULDIN, *Centrobaryca*, lib. I, cap. IX, p. 115.

9. *Déterminer le centre de gravité d'une boucle de la lemniscate de Jacques Bernoulli.*

La courbe étant représentée par l'équation

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta,$$

on trouve

$$\bar{x} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} a.$$

SECTION II.

SURFACES PLANES QUELCONQUES.

Les coordonnées $\bar{x}$, $\bar{y}$ du centre de gravité d'une surface plane quelconque sont données en coordonnées rectilignes par les formules

$$\bar{x} = \frac{\int\int x\,dx\,dy}{\int\int dx\,dy}, \quad \bar{y} = \frac{\int\int y\,dx\,dy}{\int\int dx\,dy}.$$

Et si l'on emploie les coordonnées polaires r et θ dont le pôle est à l'origine, et dont l'angle θ se compte à partir de l'axe des x, on a en coordonnées rectangulaires

$$\bar{x} = \frac{\int\int r^2 \cos\theta\, d\theta\, dr}{\int\int r\, d\theta\, dr}, \quad \bar{y} = \frac{\int\int r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr}{\int\int r\, d\theta\, dr}.$$

Les limites des intégrales sont toujours celles du corps.

1. *Déterminer le centre de gravité du secteur elliptique compris entre deux demi-diamètres conjugués a et b.*

Prenons pour axes coordonnés les deux diamètres conjugués dont il s'agit; alors l'ellipse est représentée par l'équation

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2);$$

et, par conséquent,

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \int_0^y x\,dx\,dy}{\int_0^a \int_0^y dx\,dy} = \frac{\frac{b}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx}{\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}\left[(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a}{\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a} = \frac{\frac{1}{3}a^3}{\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}a^2} = \frac{4a}{3\pi},$$

$$y = \frac{\int_0^a \int_0^y y\,dx\,dy}{\int_0^a \int_0^y dx\,dy} = \frac{\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx}{\frac{1}{4}\pi ab} = \frac{\frac{1}{3}ab^2}{\frac{1}{4}\pi ab} = \frac{4b}{3\pi}.$$

2. *Déterminer le centre de gravité du segment elliptique compris entre la courbe et une corde qui joint les extrémités de deux diamètres conjugués.*

Conservons la notation du problème précédent, et posons de plus

$$y' = \frac{b}{a}(a - x);$$

nous aurons

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \int_{y'}^y x\,dx\,dy}{\int_0^a \int_{y'}^y dx\,dy} = \frac{\frac{b}{a}\int_0^a \left[(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - (a - x)\right] x\,dx}{\frac{b}{a}\int_0^a \left[(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - (a - x)\right] dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}a^2 b}{\frac{1}{4}(\pi - 2)ab} = \frac{2}{3}\frac{a}{\pi - 2}.$$

En vertu de la symétrie de la figure par rapport aux deux axes, on a nécessairement

$$\bar{y} = \frac{2}{3}\frac{b}{\pi - 2}.$$

3. *Trouver le centre de gravité d'un secteur parabolique compris entre la courbe et deux rayons vecteurs menés du foyer.*

Soient α, β les angles que forment avec l'axe de la pa-

rabole les deux rayons vecteurs dont il s'agit, et

$$r = \frac{p}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta}$$

l'équation de la parabole en coordonnées polaires, dont l'origine est au foyer et dont les angles θ se comptent à partir de l'axe.

On a

$$\bar{x} = \frac{\int_\alpha^\beta \int_0^r r^2 \cos(\pi - \theta)\, d\theta\, dr}{\int_\alpha^\beta \int_0^r r\, d\theta\, dr} = \frac{-\frac{1}{3}\frac{p^3}{8}\int_\alpha^\beta \frac{\cos\theta}{\cos^6\frac{1}{2}\theta}\, d\theta}{\frac{1}{2}\frac{p^2}{4}\int_\alpha^\beta \frac{d\theta}{\cos^4\frac{1}{2}\theta}}.$$

Or

$$\frac{\cos\theta}{\cos^6\frac{1}{2}\theta}\, d\theta = \frac{1 - \tang^2\frac{1}{2}\theta}{1 + \tang^2\frac{1}{2}\theta}\, \sec^6\frac{1}{2}\theta\, d\theta$$

$$= \left(1 - \tang^4\frac{1}{2}\theta\right)\sec^2\frac{1}{2}\theta\, d\theta;$$

par conséquent,

$$\bar{x} = \frac{-\frac{1}{3}p\int_{\tang\frac{1}{2}\alpha}^{\tang\frac{1}{2}\beta}\left(1 - \tang^4\frac{1}{2}\theta\right) d\tang\frac{1}{2}\theta}{\int_{\tang\frac{1}{2}\alpha}^{\tang\frac{1}{2}\beta}\left(1 + \tang^2\frac{1}{2}\theta\right) d\tang\frac{1}{2}\theta}$$

$$= \frac{p}{3}\,\frac{\frac{1}{5}\left(\tang^5\frac{1}{2}\beta - \tang^5\frac{1}{2}\alpha\right) - \left(\tang\frac{1}{2}\beta - \tang\frac{1}{2}\alpha\right)}{\frac{1}{3}\left(\tang^3\frac{1}{2}\beta - \tang^3\frac{1}{2}\alpha\right) + \left(\tang\frac{1}{2}\beta - \tang\frac{1}{2}\alpha\right)}.$$

$$\bar{y} = \frac{\int_\alpha^\beta \int_0^r r^2 \sin(\pi - \theta)\, d\theta\, dr}{\int_\alpha^\beta \int_0^r r\, d\theta\, dr}.$$

Or l'intégrale du numérateur est égale à

$$\frac{1}{3}\frac{p^3}{8}\int_\alpha^\beta \frac{\sin\theta}{\cos^6\frac{1}{2}\theta}\,d\theta = -\frac{1}{3}\frac{p^3}{2}\int_{\cos\frac{1}{2}\alpha}^{\cos\frac{1}{2}\beta} \frac{d.\cos\frac{1}{2}\theta}{\cos^5\frac{1}{2}\theta}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{p^3}{8}\left(\text{séc}^4\frac{1}{2}\beta - \text{séc}^4\frac{1}{2}\alpha\right);$$

par conséquent,

$$\bar{y} = \frac{p}{3}\,\frac{\frac{1}{2}\left(\text{tang}^4\frac{1}{2}\beta - \text{tang}^4\frac{1}{2}\alpha\right) + \left(\text{tang}^2\frac{1}{2}\beta - \text{tang}^2\frac{1}{2}\alpha\right)}{\frac{1}{3}\left(\text{tang}^3\frac{1}{2}\beta - \text{tang}^3\frac{1}{2}\alpha\right) + \left(\text{tang}\frac{1}{2}\beta - \text{tang}\frac{1}{2}\alpha\right)}.$$

4. *Trouver le centre de gravité de l'aire comprise entre une branche d'hyperbole, l'asymptote correspondante et deux ordonnées parallèles à l'autre asymptote.*

Soient

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

l'équation de la courbe rapportée à ses deux asymptotes, et x', x'' les abscisses correspondantes aux ordonnées extrêmes.

On trouve

$$\bar{x} = \frac{x'' - x'}{\log x'' - \log x'}, \quad \bar{y} = \frac{1}{8}\,\frac{a^2 + b^2}{x''x'}\,\frac{x'' - x'}{\log x'' - \log x'}.$$

5. *Trouver le centre de gravité de l'aire comprise entre la parabole $a^{m-1}y = x^m$, l'axe des x et deux ordonnées.*

Si l'on représente par x' et x'' les abscisses correspon-

dantes aux ordonnées extrêmes, on trouve

$$\bar{x} = \frac{m+1}{m+2}\,\frac{x''^{m+2} - x'^{m+2}}{x''^{m+1} - x'^{m+1}},$$

$$\bar{y} = \frac{m+1}{2(2m+1)a^{m-1}}\,\frac{x''^{2m+1} - x'^{2m+1}}{x''^{m+1} - x'^{m+1}}.$$

CARRÉ, *Mesure des surfaces*, p. 80.

6. *Trouver le centre de gravité de l'aire comprise entre un arc de la sinusoïde $y = \sin x$ et l'axe des x.*

Si l'on considère l'arc limité à l'origine et à l'abscisse π, on trouve

$$\bar{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \bar{y} = \frac{\pi}{8}.$$

7. *Trouver le centre de gravité de l'aire comprise entre la droite $y = \beta x$ et la parabole $y^2 = 2px$.*

On obtient

$$\bar{x} = \frac{4p}{5\beta^2}, \quad \bar{y} = \frac{p}{\beta}.$$

SECTION III.

SOLIDES DE RÉVOLUTION.

Considérons le solide engendré par la révolution d'une surface plane autour d'une droite tracée dans son plan et que nous prendrons pour axe des x. Le centre de gravité de ce solide est situé sur l'axe de révolution, et si l'on représente par y, y' les ordonnées rectangulaires du contour de l'aire génératrice qui correspondent à une même abscisse, la position de ce centre de gravité est fixée par la formule

$$\bar{x} = \frac{\int x(y^2 - y'^2)\,dx}{\int (y^2 - y'^2)\,dx}.$$

Quand on emploie des coordonnées polaires, savoir un

rayon r mené de l'origine et un angle θ compté à partir de l'axe des x, on a

$$\bar{x} = \frac{\int\int r^3 \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, dr}{\int\int r^2 \sin\theta \, d\theta \, dr}.$$

Les intégrales s'étendent à toute l'aire génératrice.

1. *Trouver le centre de gravité d'un segment de sphère.*

Soient a le rayon de la sphère, c la distance de la base du segment au centre de la sphère, et prenons ce centre pour origine des coordonnées.

Nous avons

$$\bar{x} = \frac{\int_c^a x(a^2 - x^2)\,dx}{\int_c^a (a^2 - x^2)\,dx} = \frac{\frac{1}{4}(a^2 - c^2)^2}{\frac{2}{3}a^3 - a^2 c + \frac{1}{3}c^3} = \frac{3}{4}\,\frac{(a+c)^2}{2a+c}.$$

LUCAS VALERIUS, *De centro gravitatis solidorum*, lib. II, prop. 33, et lib. III, prop. 31.

2. *Déterminer le centre de gravité du solide engendré par la révolution d'un secteur de cercle autour de l'un de ses rayons extrêmes.*

Soient a le rayon du cercle et β l'angle du secteur.

Prenons le centre de cercle pour origine des coordonnées; alors

$$\bar{x} = \frac{\int_0^\beta \int_0^a r^3 \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, dr}{\int_0^\beta \int_0^a r^2 \sin\theta \, d\theta \, dr} = \frac{\frac{1}{4}a^4 \int_0^\beta \frac{1}{2}\sin 2\theta \, d\theta}{\frac{1}{3}a^3 \int_0^\beta \sin\theta \, d\theta}$$

$$= \frac{\frac{1}{16}a^4(1 - \cos 2\beta)}{\frac{1}{3}a^3(1 - \cos\beta)} = \frac{3}{8}a(1 + \cos\beta) = \frac{3}{4}a\cos^2\frac{1}{2}\beta.$$

WALLIS, *Opera*, t. I, p. 728.

3. *Déterminer le centre de gravité du solide engendré par la révolution de l'aire comprise entre une parabole, son axe et une ordonnée perpendiculaire, autour de la tangente au sommet.*

Soient

$$x^2 = 2py$$

l'équation de la parabole, b l'ordonnée extrême et a l'abscisse correspondante.

On a

$$\bar{x} = \frac{\int_0^b (a^2 - y^2)\, x\, dx}{\int_0^b (a^2 - y^2)\, dx} = \sqrt{2p}\, \frac{\int_0^a (a^2 - y^2)\, dy}{\int_0^a \left(a^2 y^{-\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}}\right) dy}$$

$$= \sqrt{2p}\, \frac{a^3 - \frac{1}{3} a^3}{2a^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5} a^{\frac{5}{2}}} = \frac{5}{12} \sqrt{2pa} = \frac{5}{12} b.$$

Ce problème est un cas particulier d'un problème plus général résolu par Carré, *Mesure des surfaces*, p. 93.

4. *Déterminer le centre de gravité d'une tranche de paraboloïde de révolution.*

Soient a, b les rayons des deux bases et h leur distance. La distance du centre de gravité à la petite base, dont le rayon est a, est donnée par la formule

$$\bar{x} = \frac{h}{3}\, \frac{a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2}.$$

5. *Déterminer le centre de gravité de la portion d'hyperboloïde qui est engendrée par la révolution de l'hyperbole*

$$y^2 = \frac{b^2}{b^2}(x^2 + 2ax)$$

autour de l'axe des x, et qui est comprise entre les deux plans $x = 0$, $x = c$.

On trouve

$$\bar{x} = \frac{8ac + 3c^2}{4(3a + c)}.$$

CARRÉ, *Mesure des surfaces*, p. 97.

6. *Déterminer le centre de gravité d'un solide engendré par l'aire comprise entre une parabole, son axe et une ordonnée perpendiculaire, quand l'aire tourne autour de cette ordonnée.*

Si l'on représente l'ordonnée extrême par b, on trouve que la distance du centre de gravité à l'axe est égale à $\frac{5}{16}b$.

CARRÉ, *Mesure des surfaces*, p. 90.

7. *Déterminer le centre de gravité de la partie d'un hyperboloïde à une nappe de révolution qui est comprise entre deux plans perpendiculaires à l'axe, dont l'un passe au centre et l'autre à l'extrémité de l'axe imaginaire.*

Soient $2b$ l'axe imaginaire de l'hyperbole génératrice, et $\bar{x}$ la distance du centre de gravité au centre de la courbe.

On a

$$\bar{x} = \frac{9}{16}b.$$

CARRÉ, *Mesure des surfaces*, p. 97.

8. *Déterminer le centre de gravité du solide terminé à la surface qu'engendrent les deux paraboles*

$$y^2 = 2px, \quad y^2 = 2p'(a - x)$$

en tournant autour de l'axe des x.

On trouve

$$\bar{x} = \frac{a}{3}\,\frac{p + 2p'}{p + p'}.$$

SECTION IV.

SOLIDES QUELCONQUES.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires ou obliques d'un point pris dans l'intérieur du solide considéré, et $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ les coordonnées du centre de gravité de ce corps.

On a les formules

$$\bar{x} = \frac{\int\int\int x\,dx\,dy\,dz}{\int\int\int dx\,dy\,dz},\quad \bar{y} = \frac{\int\int\int y\,dx\,dy\,dz}{\int\int\int dx\,dy\,dz},\quad \bar{z} = \frac{\int\int\int z\,dx\,dy\,dz}{\int\int\int dx\,dy\,dz},$$

où les intégrales s'étendent au corps entier.

1. *Déterminer le centre de gravité de la portion du cône*

$$y^2 + z^2 = \beta^2 x^2$$

qui est comprise entre les plans des zx, des xy et un troisième plan parallèle à celui des yz.

Soit a la distance de ce troisième plan à l'origine. Nous avons

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \int_0^{\beta x} x\sqrt{\beta^2 x^2 - y^2}\,dx\,dy}{\int_0^a \int_0^{\beta x} \sqrt{\beta^2 x^2 - y^2}\,dx\,dy} = \frac{\int_0^a x.\frac{1}{4}\pi\beta^2 x^2\,dx}{\int_0^a \frac{1}{4}\pi\beta^2 x^2\,dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{16}\pi\beta^2 a^4}{\frac{1}{12}\pi\beta^2 a^3} = \frac{3}{4}a.$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^a \int_0^{\beta x} y\sqrt{\beta^2 x^2 - y^2}\,dx\,dy}{\int_0^a \int_0^{\beta x} \sqrt{\beta^2 x^2 - y^2}\,dx\,dy} = \frac{\int_0^a \frac{1}{3}\beta^3 x^3\,dx}{\frac{1}{12}\pi\beta^2 a^3} = \frac{\beta}{\pi}a.$$

On trouve pareillement

$$\bar{z} = \frac{\beta}{\pi} a.$$

2. *Sur une même base circulaire on place une demi-sphère et un paraboloïde de révolution dont le paramètre est égal au rayon de la sphère; déterminer le centre de gravité du solide compris entre la sphère, le paraboloïde et un plan mené par l'axe de cette surface.*

Soient

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

$$x^2 + y^2 = a(a - 2z),$$

et

$$y = 0$$

les équations de la sphère, du paraboloïde et du plan.

Si l'on pose

$$y' = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad z' = \frac{a^2 - x^2 - y^2}{2a},$$

et

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

on a

$$\bar{y} = \frac{\int_{-a}^{a}\int_{0}^{y'}\int_{z'}^{z} y\,dx\,dy\,dz}{\int_{-a}^{a}\int_{0}^{y'}\int_{z'}^{z} dx\,dy\,dz}, \quad \bar{z} = \frac{\int_{-a}^{a}\int_{0}^{y'}\int_{z'}^{z} z\,dx\,dy\,dx}{\int_{-a}^{a}\int_{0}^{y'}\int_{z'}^{z} dx\,dy\,dz},$$

et

$$\bar{x} = 0.$$

Or

$$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{y'}\int_{z'}^{z} dx\,dy\,dz = \int_{-a}^{a}\int_{0}^{y'} (z - z')\,dx\,dy$$

$$= \int_{-a}^{a}\left[\frac{1}{4}\pi(a^2 - x^2) - \frac{1}{3a}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]dx$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^3 - \frac{1}{3a}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{3}\pi a^3 - \frac{1}{8}\pi a^3 = \frac{5}{24}\pi a^3,$$

$$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{y'}\int_{z'}^{z} y\,dx\,dy\,dz = \int_{-a}^{a}\int_{0}^{y'} y(z - z')\,dx\,dy$$

$$= \int_{-a}^{a} dx\left[-\frac{1}{3}(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4a}(a^2 - x^2)y^2 + \frac{1}{8a}y^4\right]_{y=0}^{y=y'}$$

$$= \int_{-a}^{a} dx\left[\frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8a}(a^2 - x^2)^2\right] = \frac{1}{8}\pi a^4 - \frac{1}{15}a^4$$

$$= \frac{15\pi - 16}{120}a^4;$$

$$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{y'}\int_{z'}^{z} z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\int_{0}^{y'}(z^2 - z'^2)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} dx\left[\frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15a^2}(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\pi a^4 - \frac{1}{48}\pi a^4 = \frac{5}{48}\pi a^4;$$

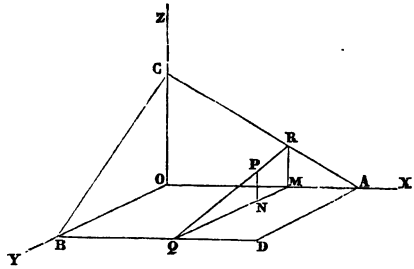
et, d'après ces calculs,

$$\bar{y} = \frac{15\pi - 16}{25\pi}a, \quad \bar{z} = \frac{1}{2}a.$$

3. Soient trois axes rectangulaires OX, OY, OZ. On trace dans le plan ZX une droite AC, et dans le plan XY une parallèle BD à l'axe des x; une droite QR glisse sur AC et BD en restant toujours parallèle au plan YZ. *Trouver le centre de gravité du solide compris entre les*

trois plans XY, YZ, ZX *et la surface engendrée par la droite mobile.*

Fig. 1.



Soient $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, et x, y, z les coordonnées d'un point P de la droite mobile RQ.

On voit aisément que

$$PN = z = c\,\frac{a-x}{a}\,\frac{b-y}{b};$$

dès lors

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \int_0^b x\,(a-x)\,(b-y)\,dx\,dy}{\int_0^a \int_0^b (a-x)\,(b-y)\,dx\,dy} = \frac{\frac{1}{6}a^3}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{3}a,$$

et, d'après la symétrie de la figure, $\bar{y} = \frac{1}{3}b$.

$$\bar{z} = \frac{\int_0^a \int_0^b \frac{1}{2}c^2\frac{(a-x)^2}{a^2}\frac{(b-y)^2}{b^2}\,dx\,dy}{\int_0^a \int_0^b c\,\frac{(a-x)}{a}\,\frac{(b-y)}{b}\,dx\,dy} = \frac{c}{2ab}\,\frac{\frac{1}{3}a^3.\frac{1}{3}b^3}{\frac{1}{2}a^2.\frac{1}{2}b^2} = \frac{2c}{9}.$$

4. *Trouver le centre de gravité du solide compris entre la sphère*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

et les trois plans coordonnés.

On trouve

$$\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{3}{8} a.$$

5. *Trouver le centre de gravité du solide compris entre le paraboloïde*

$$y^2 + z^2 = 2px$$

et les plans $x = a, y = 0, z = 0$.

Si l'on représente par b le rayon du cercle suivant lequel le paraboloïde est coupé par le plan $x = a$, on trouve

$$\bar{x} = \frac{2}{3} a, \quad \bar{y} = \bar{z} = \frac{16b}{15\pi}.$$

6. *Trouver le centre de gravité du solide compris entre le paraboloïde*

$$z^2 = xy,$$

les plans coordonnés et les plans $x = a, y = b$.

On trouve

$$\bar{x} = \frac{3}{5} a, \quad \bar{y} = \frac{3}{5} b, \quad \bar{z} = \frac{9}{32} \sqrt{ab}.$$

7. *Trouver le centre de gravité du solide compris entre le cylindre*

$$y^2 = 2ax - x^2$$

et les plans $z = \beta x$, $z = \beta' x$.

On trouve

$$\bar{x} = \frac{5}{4} a, \quad \bar{y} = 0, \quad \bar{z} = \frac{5}{8} (\beta + \beta') a.$$

8. *Une droite tourne autour d'un point fixe* O *en s'appuyant sur le contour d'une surface* S. *On connaît le centre de gravité* G *de cette surface, trouver celui du solide compris entre la surface* S *et le cône décrit par la droite.*

Le centre de gravité du solide est situé sur la droite OG aux trois quarts de sa longueur.

9. *D'un cône droit et homogène, de hauteur h, on retranche par une section parallèle à la base un cône de hauteur h', et l'on divise le tronc restant par un plan mené suivant l'axe.*

A quelle condition doivent satisfaire les hauteurs h et h' pour que le demi-tronc de cône puisse se tenir debout sur sa petite base?

La condition demandée est

$$\frac{h+h'}{h'} \leqq \pi \frac{h^2+hh'+h'^2}{h^2+h'^2}.$$

SECTION V.

COURBES PLANES.

Soit ds l'élément de l'arc qui correspond aux coordonnées x, y. Les coordonnées $\bar{x}$, $\bar{y}$ du centre de gravité sont données par les formules

$$\bar{x} = \frac{\int x\,ds}{\int ds}, \quad \bar{y} = \frac{\int y\,ds}{\int ds},$$

où les intégrales sont prises d'une extrémité de l'arc à l'autre.

Le jésuite flamand Della Faille eut le premier l'idée de déterminer le centre de gravité d'une ligne courbe; il publia ses recherches en 1632 sous le titre : *Theoremata de centro gravitatis partium circuli et ellipsis. Antuerpiæ;* 1632.

1. *Déterminer le centre de gravité de l'arc de la sinusoïde*

$$y = \sin x,$$

qui est compris entre les abscisses $x = 0$, $x = \pi$.

On a

$$ds^2 = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) dx^2 = (1 + \cos^2 x)\, dx^2,$$

et, par conséquent,

$$\bar{y} = \frac{\int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx}{\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx} = \frac{\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x}\, dx}.$$

L'intégrale du dénominateur est une fonction elliptique de seconde espèce; nous la représenterons par E, alors

$$E\sqrt{2}\,\bar{y} = \sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}).$$

2. *Trouver le centre de gravité d'un arc de cercle.*

La distance du centre de gravité au centre du cercle est

$$\bar{x} = \frac{\text{rayon} \times \text{corde}}{\text{arc}}.$$

GULDIN, *Centrobaryca*, lib. I, cap. v, p. 59.

3. *Déterminer le centre de gravité de la moitié d'une branche de la cycloïde qui est représentée par les équations*

$$x = a(1 - \cos\omega),$$
$$y = a(\omega + \sin\omega) \quad (*).$$

Si l'on considère la demi-branche qui commence à l'origine, on trouve

$$\bar{x} = \frac{2}{3} a, \quad \bar{y} = \left(\pi - \frac{4}{3} a\right).$$

WALLIS, *Opera*, t. I, p. 520.

(*) *Voir* Sect. I, problème 7.

4. *Déterminer le centre de gravité d'un arc de la chaînette*

$$y = \frac{1}{2} a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

compris entre deux coordonnées également éloignées de l'origine.

Représentant la longueur de l'arc par $2s$, on trouve

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = \frac{ax + sy}{2s}.$$

5. *Trouver le centre de gravité de l'une des moitiés symétriques de l'arc qui forme une boucle dans la lemniscate de Jacques Bernoulli,*

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

Prenons le nœud pour origine, l'axe de la boucle pour axe des x, et nommons l la longueur du demi-arc considéré. Nous trouvons

$$\bar{x} = \frac{a^2}{l\sqrt{2}}, \quad y = \frac{a^2(\sqrt{2} - 1)}{l\sqrt{2}}.$$

SECTION VI.

COURBES A DOUBLE COURBURE.

Si l'on représente par ds l'élément de l'arc qui correspond aux coordonnées x, y, z, les coordonnées $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ du centre de gravité de la courbe seront déterminées par les formules

$$\bar{x} = \frac{\int x\,ds}{\int ds}, \quad \bar{y} = \frac{\int y\,ds}{\int ds}, \quad \bar{z} = \frac{\int z\,ds}{\int ds},$$

où les limites des intégrales sont les extrémités de l'arc.

1. *Trouver le centre de gravité d'un arc d'hélice.*

Prenons pour équations de la courbe

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = b \operatorname{arc\,cos} \dfrac{x}{a}, \end{cases}$$

et considérons l'arc qui commence au plan des xy, et se termine au point (x, y, z).

Nous trouvons

$$\bar{x} = \frac{by}{z}, \quad \bar{y} = \frac{b(a-x)}{z}, \quad \bar{z} = \frac{z}{2}.$$

Si l'on nomme ω l'arc de cercle qui est la projection de l'arc d'hélice sur le plan des xy, les formules précédentes donnent

$$\frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}, \qquad \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} = \frac{2a \sin \frac{\omega}{2}}{\omega} = \frac{\text{rayon} \times \text{corde}}{\text{arc}}.$$

Au reste, il est aisé de reconnaître sans calcul que, pour un arc moindre qu'une spire, le centre de gravité se trouve sur le plan perpendiculaire à l'axe qui passe au milieu de l'arc, et au point de ce plan qui est le centre de gravité de la projection de l'arc. Le même raisonnement s'appliquera à une portion de la surface d'un héliçoïde gauche comprise entre deux génératrices.

SECTION VII.

SURFACES DE RÉVOLUTION.

Prenons l'axe de révolution pour axe des x, et représentons par ds l'élément de la courbe génératrice qui correspond aux coordonnées x, y; l'abscisse du centre de

gravité est donnée par la formule

$$\bar{x} = \frac{\int xy\,ds}{\int y\,ds},$$

où les intégrales s'étendent à toute la courbe génératrice.

1. *Déterminer le centre de gravité d'une zone sphérique.*

Soient b et c les distances du centre de la sphère aux deux bases de la zone; prenons l'axe des x perpendiculaire à ces deux bases, et l'origine au centre de la sphère.

L'équation de la courbe génératrice est

$$x^2 + y^2 = a^2;$$

on en tire

$$ds = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\,dx = \frac{a}{y}\,dx,$$

et, par conséquent,

$$\bar{x} = \frac{\int_b^c ax\,dx}{\int_b^c a\,dx} = \frac{\frac{1}{2}a(c^2 - b^2)}{a(c-b)} = \frac{c+b}{2}.$$

On pouvait prévoir ce résultat sans calcul, en observant que deux zones de même hauteur ont une même surface.

2. *Trouver le centre de gravité de la surface courbe d'un cône droit.*

Soient c la longueur de l'axe et $\bar{x}$ la distance du centre de gravité au sommet du cône.

On trouve

$$\bar{x} = \frac{2}{3}c.$$

GULDIN, *Centrobaryca*, lib. I, cap. x, prop. 3.

3. *Déterminer le centre de gravité de la surface engendrée par la révolution autour de l'axe des x d'une moitié de l'arc de la cycloïde représentée par les équations*

$$\begin{cases} x = a(1 - \cos\omega), \\ y = a(\omega + \sin\omega). \end{cases}$$

On trouve

$$\bar{x} = \frac{2}{15} a \frac{15\pi - 8}{3\pi - 4}.$$

4. *Trouver le centre de gravité de la surface engendrée par la parabole $y^2 = 2px$ tournant autour de l'axe des x.*

Pour la portion de surface terminée au plan $x = x$, on trouve

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \frac{(3x - p)(2x + p)^{\frac{3}{2}} + p^{\frac{5}{2}}}{(2x + p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}}.$$

SECTION VIII.

SURFACES QUELCONQUES.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque sur la surface considérée, et

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q.$$

Les coordonnées $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ du centre de gravité seront données par les formules

$$\bar{x} = \frac{\int\int x\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy}{\int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy},$$

$$\bar{y} = \frac{\int\int y\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy}{\int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy},$$

$$\bar{z} = \frac{\int\int z\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy}{\int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy},$$

où les intégrales s'étendent à toute la surface dont il s'agit.

1. Considérons la surface enveloppe d'une sphère de rayon constant, et dont le centre décrit une courbe plane. Si l'on prend le plan de la courbe directrice pour plan des xy, et que l'on représente cette courbe par l'équation

$$y_1 = \varphi(x_1),$$

l'équation de la sphère mobile sera

$$(x - x_1)^2 + [y - \varphi(x_1)]^2 + z^2 = r^2;$$

on en déduit, par différentiations,

$$x - x_1 + pz = 0, \quad y - \varphi(x_1) + qz = 0,$$

et si l'on élimine x_1 et $\varphi(x_1)$ entre ces trois dernières équations, il vient

$$z\sqrt{1 + p^2 + q^2} = r;$$

par conséquent l'ordonnée du centre de gravité de la demi-surface enveloppe située au-dessus du plan des xy est

$$\bar{z} = r\,\frac{\int\int dx\,dy}{\int\int\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy}.$$

Dans cette expression, le dénominateur représente l'aire de la surface enveloppe, et le numérateur représente la projection de cette aire sur le plan des xy; d'où il suit que *la distance du centre de gravité de la surface au plan de la courbe directrice est une quatrième proportionnelle à l'aire de la surface, à l'aire de sa projection sur le plan de la directrice et au rayon de la sphère.* Cette relation subsiste évidemment lorsque la surface enveloppe se réduit à celle de la sphère.

2. Soient S l'aire d'une figure tracée à volonté sur la surface d'une sphère dont le rayon est r;

S_z la projection de cette aire sur un plan diamétral;

$\bar{z}$ la distance de ce plan au centre de gravité de la surface S;

dS l'élément de cette surface,

et α l'angle que le rayon mené du centre à cet élément fait avec la normale au plan.

On a

$$\bar{z} = \frac{\int z dS}{S}.$$

Or

$$z = r\cos\alpha \quad \text{et} \quad \int \cos\alpha dS = S_z;$$

par conséquent

$$\bar{z} = r\frac{S_z}{S}.$$

Ainsi nous pouvons énoncer la proposition suivante, qui permettra dans bien des cas de déterminer aisément le centre de gravité d'une figure sphérique :

Soient OX, OY, OZ *trois droites quelconques menées par le centre d'une sphère dont le rayon est* r; S *l'aire d'une figure tracée à volonté sur la surface de la sphère;* S_x, S_y, S_z *les projections de cette aire sur les plans* YOZ, ZOX, XOY, *et* $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ *les distances des mêmes plans au centre de gravité de la surface* S.

On a

$$\frac{\bar{x}}{S_x} = \frac{\bar{y}}{S_y} = \frac{\bar{z}}{S_z} = \frac{r}{S}.$$

Appliquons ce théorème à la détermination du centre de gravité d'un triangle sphérique.

Nommons A, B, C les angles du triangle, a, b, c les

côtés opposés, et faisons coïncider les droites OX, OY, OZ avec les rayons OA, OB, OC. Nous avons

$$S = \frac{\pi r^2}{180}(A + B + C - 180);$$

d'ailleurs la projection de cette surface sur le plan BOC a pour valeur

$$\begin{aligned} &\text{aire BOC} - \text{aire COA}.\cos C - \text{aire AOB}.\cos B \\ &= \frac{\pi r^2}{360}(a - b\cos C - c\cos B); \end{aligned}$$

par conséquent

$$\bar{x} = \frac{1}{2} r \frac{a - b\cos C - c\cos B}{A + B + C - 180};$$

et de même,

$$\bar{y} = \frac{1}{2} r \frac{b - c\cos A - a\cos C}{A + B + C - 180},$$

$$\bar{z} = \frac{1}{2} r \frac{c - a\cos B - b\cos A}{A + B + C - 180}.$$

3. Considérons la surface engendrée par la révolution de la chaînette

$$z = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

autour de l'axe des z, et concevons que cette surface se déplace de manière que, son axe restant toujours vertical, son sommet décrive une courbe dans un plan parallèle à celui des xy; il en résultera une surface enveloppe dont nous nous proposons d'étudier le centre de gravité.

Soient

$$y_1 = \varphi(x_1)$$

l'équation de la courbe décrite par le sommet de la sur-

face génératrice, p, q les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ relatives à la surface enveloppe, et

$$R = \sqrt{(x - x_1)^2 + [y - \varphi(x_1)]^2}.$$

L'équation de la surface mobile est

$$z = a\,\frac{e^{\frac{R}{a}} + e^{-\frac{R}{a}}}{2};$$

on en tire

$$p = \frac{x - x_1}{R}\,\frac{e^{\frac{R}{a}} - e^{-\frac{R}{a}}}{2}, \quad q = \frac{y - \varphi(x_1)}{R}\,\frac{e^{\frac{R}{a}} - e^{-\frac{R}{a}}}{2},$$

et si l'on élimine x_1 et $\varphi(x_1)$ entre ces trois dernières équations, il vient

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{z}{a}.$$

De là résulte une propriété curieuse de cette surface enveloppe. En effet, traçons sur cette surface un contour quelconque, et soit $\bar{z}$ l'ordonnée du centre de gravité de la portion de surface limitée par ce contour, on aura

$$\bar{z} = \frac{\int\int z^2\,dx\,dy}{\int\int z\,dx\,dy}.$$

D'un autre côté, si l'on représente par $\underline{z}$ l'ordonnée du centre de gravité du solide cylindrique, qui est renfermé entre le plan des xy, les ordonnées du contour et la surface enveloppe, on aura

$$\underline{z} = \frac{\frac{1}{2}\int\int z^2\,dx\,dy}{\int\int z\,dx\,dy},$$

les intégrales ont ici les mêmes limites que dans l'expression de $\bar{z}$; par conséquent

$$\bar{z} = 2z.$$

Ce que nous venons de dire subsiste évidemment lorsque la surface enveloppe se réduit à l'une des surfaces enveloppées.

C'est au professeur Giulio, de Turin, que nous devons les théorèmes exposés dans les nos 1, 2, et 3 (*voir* le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, t. IV, p. 386).

4. *Soient* OX, OY, OZ *trois axes quelconques menés par le centre d'une sphère dont le rayon est* r;

S *l'aire d'une figure tracée à volonté sur la surface de cette sphère;*

S_x, S_y, S_z *les projections de cette aire parallèles aux axes sur les plans* YOZ, ZOX, XOY;

OX′, OY′, OZ′ *de nouveaux axes respectivement perpendiculaires à ces plans;*

$\overline{x'}$, $\overline{y'}$, $\overline{z'}$ *les coordonnées du centre de gravité de la surface* S *par rapport à ces derniers axes.*

On a

$$\frac{\overline{x'}}{S_x} = \frac{\overline{y'}}{S_y} = \frac{\overline{z'}}{S_z} = \frac{r}{S}.$$

SCHELLBACH, *Journal* de M. Crelle, t. XLV; 1853.

La démonstration de M. Schellbach est assez compliquée; toutefois le théorème est susceptible d'une démonstration simple.

Nommons dS un élément de la surface, x', y', z' ses coordonnées par rapport aux seconds axes, α l'angle que le rayon mené à cet élément fait avec la normale OX au plan Y′OZ′, et θ l'angle des droites OX, OX′.

On a

$$\overline{x'} = \frac{\int x' \, dS}{S}.$$

Or la perpendiculaire abaissée de l'élément dS sur le plan $Y'OZ'$ est égale à $r \cos \alpha$, et, puisque la droite OX' fait un angle θ avec cette perpendiculaire,

$$x' = \frac{r \cos \alpha}{\cos \theta};$$

d'où

$$\overline{x'} = r \frac{\int \frac{\cos \alpha}{\cos \theta} \, dS}{S}.$$

Projetons l'élément dS sur le plan YOZ parallèlement à la droite OX. Les lignes projetantes font un angle θ avec la normale OX' au plan de projection, et elles font un angle α avec le rayon qui aboutit à l'élément projeté. Or, quand on projette une aire plane P sur un autre plan, si l'on nomme α l'angle que les lignes projetantes font avec la normale au plan de l'aire projetée et θ l'angle qu'elles forment avec la normale au plan de projection, la projection de l'aire est égale à

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \theta} P.$$

De là il résulte que nous avons

$$\int \frac{\cos \alpha}{\cos \theta} \, dS = S_x;$$

et, par conséquent,

$$\frac{\overline{x'}}{S_x} = \frac{r}{S}.$$

Considérons, par exemple, la surface d'un triangle sphérique ABC dont les côtés sont a, b, c.

Si nous faisons coïncider les droites OX, OY, OZ avec les rayons OA, OB, OC, nous aurons

$$\overline{x'} = \frac{ar^3}{2S}, \quad \overline{y'} = \frac{br^3}{2S}, \quad \overline{z'} = \frac{cr^3}{2S}.$$

On peut remarquer que les deux trièdres OXYZ, OX'Y'Z' étant supplémentaires l'un de l'autre, on a également, en faisant usage de notations symétriques pour les deux systèmes d'axes,

$$\frac{\overline{x}}{S'_x} = \frac{\overline{y}}{S'_y} = \frac{\overline{z}}{S'_z} = \frac{r}{S}.$$

5. *Déterminer le centre de gravité de la surface du cône*

$$y^2 + z^2 = \beta^2 x^2$$

qui est comprise entre les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = a$.

On trouve

$$\overline{x} = \frac{2}{3} a, \quad \overline{y} = \overline{z} = \frac{4}{3\pi} \beta a.$$

6. *Une droite tourne autour d'un point fixe* O *en s'appuyant sur une courbe* S *dont on connaît le centre de gravité* G ; *trouver le centre de gravité de la surface conique terminée au point fixe et à la courbe.*

Le point cherché est sur la droite OG aux deux tiers de sa longueur.

SECTION IX.

CORPS HÉTÉROGÈNES.

Lorsque dans un corps la densité varie d'un point à un autre, on détermine le centre de gravité de ce corps par des formules qui diffèrent de celles que nous avons em-

ployées dans les sections précédentes par la seule addition, sous les signes $\int$, de la densité ρ exprimée en fonction des coordonnées.

1. *Déterminer le centre de gravité de la surface d'un hémisphère, lorsque la densité de chaque point de cette surface est proportionnelle à sa distance de la base.*

On peut considérer la demi-sphère comme engendrée par la révolution d'un quart de la circonférence

$$x^2 + y^2 = a^2$$

autour de l'axe des x; dès lors, si l'on représente par ds l'élément de l'arc du cercle, et que l'on décompose la demi-sphère en zones infiniment étroites et parallèles à la base, on a

$$\bar{x} = \frac{\int 2\pi\rho xy\,ds}{\int 2\pi\rho y\,ds} = \frac{\int \rho xy\,ds}{\int \rho y\,ds},$$

et, puisque ρ est proportionnelle à x,

$$\bar{x} = \frac{\int x^2 y\,ds}{\int xy\,ds};$$

d'ailleurs,

$$ds = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\,dx = \frac{a}{y}\,dx,$$

donc

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x^2 dx}{\int_0^a x dx} = \frac{2}{3}a.$$

2. *Déterminer le centre de gravité d'une droite matérielle, dont la densité varie comme la $n^{ième}$ puissance de la distance à un point fixe pris sur le prolongement de cette droite.*

Soient a, b, $\bar{x}$ les distances de ce point fixe aux extrémités de la droite et à son centre de gravité.

On trouve

$$\bar{x} = \frac{n+1}{n+2} \frac{b^{n+2} - a^{n+2}}{b^{n+1} - a^{n+1}}.$$

3. *Déterminer le centre de gravité de la surface d'un quart de cercle où la densité est proportionnelle à la $n^{ième}$ puissance de la distance au centre.*

Si l'on prend les rayons extrêmes pour axes coordonnés, et que l'on représente par a le rayon du cercle, on trouve

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{n+2}{n+3} \cdot \frac{2a}{\pi}.$$

SECTION X.

COMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES. — CENTRE DES FORCES PARALLÈLES. — CENTRE DE GRAVITÉ DES POLYGONES ET DES POLYÈDRES.

Lorsque des forces parallèles en nombre quelconque sollicitent les différents points d'un système solide, elles peuvent, en général, se réduire à une résultante unique dont la direction passe toujours par un même point du système, quelle que soit leur direction. Ce point unique est le *centre des forces parallèles*.

Soient P l'une quelconque des forces parallèles, x, y, z les coordonnées de son point d'application, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ celles du centre des forces parallèles, R la résultante et Σ un signe sommatoire qui s'étend à toutes les forces considérées.

On a

$$R = \Sigma P, \quad \bar{x} = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}.$$

Ces formules ont été données pour la première fois par Varignon dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour l'année 1714. Elles cessent d'être applicables lorsque $\Sigma P = 0$; car alors les forces parallèles ne peuvent se réduire à une résultante unique, elles se composent en un couple.

1. *Aux sommets d'un triangle rigide sont appliquées trois forces parallèles, et proportionnelles aux côtés opposés. Déterminer le centre des forces parallèles.*

Soient a, b, c les côtés, A, B, C les sommets opposés, μa, μb, μc les forces qui leur sont appliquées; prenons AB pour axe des x, AC pour axe des y.

Il vient

$$\bar{x} = \frac{b.\mu c}{\mu a + \mu b + \mu c} = \frac{bc}{a + b + c}, \quad \text{et} \quad \bar{y} = \bar{x}.$$

Si l'on nomme r la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre des forces parallèles sur le côté AB, on a

$$r = \bar{y} \cos A = \frac{c.b \cos A}{a + b + c} = 2 \frac{\text{surface du triangle}}{\text{périmètre}},$$

c'est la longueur du rayon du cercle inscrit au triangle ABC. Le centre des forces parallèles coïncide donc avec le centre du cercle inscrit.

Il est facile d'arriver sans calcul à la même conclusion. En effet, on aura la résultante des trois forces en composant d'abord entre elles les forces μb et μc, puis la résultante partielle obtenue avec la force μa; or, cette résultante partielle a son point d'application au point qui divise le côté BC en parties proportionnelles aux côtés adjacents. Ce point appartient à la bissectrice de l'angle A; donc la résultante totale des trois forces μa, μb, μc a son point d'application sur la bissectrice de l'angle A. Ce point

est par la même raison sur la bissectrice de l'angle B; il s'ensuit qu'il coïncide avec le centre du cercle inscrit.

2. *Démontrer que le centre de la sphère inscrite à un tétraèdre est aussi le centre commun de gravité de quatre masses proportionnelles aux aires des faces du tétraèdre et placées respectivement aux sommets opposés.*

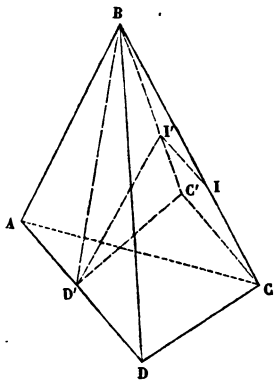
Annales de Gergonne, t. XVII, p. 331; 1827.

Cette proposition se démontre comme celle qui fait l'objet du numéro précédent.

Soient ABCD le tétraèdre, a, b, c, d les aires des faces opposées aux sommets de même nom.

Les forces μb et μc, appliquées aux sommets B et C, donnent une résultante appliquée au point qui divise l'arête BC en segments proportionnels aux faces c et b de l'angle dièdre opposé BADC. Or, ce point, nous allons le voir, appartient au plan bissecteur du dièdre BADC. S'il en est ainsi, la résultante totale, que l'on obtiendra en composant la résultante partielle déjà obtenue avec les forces μa et μd, aura évidemment son point d'application sur le plan bissecteur du dièdre BADC. Ce point doit se trouver par la même raison sur les plans bissecteurs des autres dièdres; donc il coïncide avec le centre de la sphère inscrite.

Fig. 2.



Il reste à prouver que le plan bissecteur de l'angle dièdre BADC partage l'arête opposée BC en deux segments BI et CI, proportionnels aux faces adjacentes BAD et CAD de l'angle dièdre.

Pour cela, considérons le tétraèdre en projection sur un plan BD′C′ mené par le sommet B perpendiculairement à l'arête AD. Soient C′ la projection de C, D′I′ la trace du plan bissecteur sur le plan de projection. Cette trace partage BC′ au point I′ en deux segments proportionnels à BD′ et C′D′. Ce même plan bissecteur coupe le plan projetant de BC suivant une droite I′I parallèle à CC′. Il s'ensuit que $\frac{BI}{CI} = \frac{BD'}{C'D'}$; mais BD′ est la hauteur du triangle BAD, et C′D′ est égal à la hauteur du triangle de même base CAD; donc

$$\frac{BI}{CI} = \frac{\text{tr. BAD}}{\text{tr. CAD}}.$$

3. *Aux trois sommets* B, C, D *d'un tétraèdre* ABCD *sont appliquées trois forces parallèles* P, Q, R. *Déterminer la distance de leur centre au sommet* A.

Soient r cette distance et $AB = b$, $AC = c$, $AD = d$. On a

$$r^2(P + Q + R)^2 = P^2 b^2 + Q^2 c^2 + R^2 d^2 + 2PQ\,bc\cos(\widehat{BAC})$$
$$+ 2QR\,cd\cos(\widehat{CAD}) + 2RP\,db\cos(\widehat{DAB}).$$

4. *A trois points fixes, qui ont pour coordonnées a, b; a', b'; a'', b'', sont appliquées trois forces parallèles p, p', p''; les deux premières forces sont constantes, et la troisième variable. Déterminer le lieu du centre des forces parallèles.*

Ce lieu est la droite représentée par l'équation

$$(ap + a'p')\,b'' + [(a'' - a)\,p + (a'' - a')\,p']\,y$$
$$= (bp + b'p')\,a'' + [(b'' - b)\,p + (b'' - b')\,p']\,x.$$

5. *n forces parallèles et constantes sont appliquées à n points; $n - 1$ de ces points restent fixes, pendant que*

le dernier décrit une courbe. Montrer que le centre des forces parallèles décrit une courbe semblable et semblablement placée.

Considérons en particulier deux corps dont l'un reste fixe, tandis que le centre de gravité de l'autre décrit un cercle d'un mouvement uniforme.

Soient P le poids du corps fixe, G son centre de gravité, P′ et G′ le poids et le centre de gravité du corps mobile, a la distance du point fixe G au centre O du cercle décrit par G′.

Le centre de gravité $\overline{G}$ de l'ensemble des deux corps décrit d'un mouvement uniforme un cercle dont le centre O′ est sur la droite GO, à une distance du premier point égale à $\frac{P'}{P+P'}a$.

Supposons que le corps P soit une forte aiguille, et P′ un petit poids qui tourne dans un plan vertical par l'effet d'un mouvement d'horlogerie fixé à l'aiguille. Si nous suspendons le système par un axe horizontal passant au point O′, le centre de gravité G devra se trouver constamment au-dessous de ce point sur la même verticale; et, par suite, l'aiguille tournera autour de O′ d'un mouvement uniforme. Elle pourra marquer les heures.

Cette petite machine a été construite : on la nomme l'*horloge magique,* parce que l'aiguille revient d'elle-même sur l'heure quand on l'en a écartée.

6. *Les centres de gravité de l'aire et du contour d'un polygone circonscrit à une circonférence sont toujours situés sur une droite qui passe par le centre de cette circonférence; leurs distances au centre de la circonférence inscrite sont entre elles dans le rapport de* 2 *à* 3.

En effet, décomposons le polygone en triangles ayant leur sommet commun au centre du cercle inscrit. Pla-

çons ensuite aux trois sommets de chaque triangle des masses sphériques égales, ayant leurs centres aux sommets et proportionnelles aux aires des triangles, c'est-à-dire à leurs bases. Le centre de gravité du contour sera celui des poids placés aux sommets du polygone. Admettons que tous ces poids soient réunis en une seule masse à leur centre de gravité. Alors le centre de gravité de l'aire s'obtiendra en composant cette masse avec celle qui se trouve au centre du cercle et qui est moitié moindre; il sera donc situé sur la droite qui réunit le centre du cercle au centre de gravité du contour, et sa distance au premier point sera double de sa distance au second, ce qui démontre le théorème.

Cette proposition a lieu pour un triangle quelconque; elle s'appliquerait aussi à un polygone gauche dont les côtés seraient tangents à une sphère. Seulement il faudrait, dans ce cas, remplacer l'aire polygonale par la somme des aires triangulaires qui ont leur sommet commun au centre de la sphère et qui ont pour bases les côtés du polygone circonscrit.

BRASSINE, *Journal* de M. Liouville, t. VIII; 1843.

7. *Le centre de gravité d'un polyèdre circonscrit à une sphère est situé sur la droite qui joint le centre de gravité de la surface de ce polyèdre avec le centre de la sphère inscrite.*

Les distances du centre de gravité du polyèdre et du centre de gravité de sa surface au centre de la sphère inscrite sont entre elles dans le rapport de 3 *à* 4.

Ces propositions sont vraies pour une pyramide triangulaire quelconque. Elles se démontrent comme celles qui précèdent, seulement les triangles sont remplacés par des pyramides triangulaires ayant leur sommet commun au centre de la sphère inscrite.

Ce mode de démonstration s'applique avec avantage à la plupart des propositions connues sur les centres de gravité des polygones et des polyèdres.

BRASSINE, *Journal* de M. Liouville, t. VIII; 1843.

8. *Démontrer que si trois hommes soutiennent par les trois sommets une plaque triangulaire, homogène et d'égale épaisseur, chacun d'eux porte un poids égal.*

9. *Quatre hommes ont à porter une plaque triangulaire, homogène et d'égale épaisseur. Deux d'entre eux la prennent chacun par un sommet. A quels points du bord doivent la saisir les deux autres, afin que le poids soit également réparti entre les quatre porteurs?*

On démontre aisément que les points cherchés sont situés sur les côtés qui aboutissent au sommet libre, à une distance de celui-ci égale au tiers du côté.

10. *Trois hommes ont à transporter une plaque homogène, d'égale épaisseur, formant un parallélogramme. L'un d'eux saisit la plaque par un sommet. On demande à quels points du contour les deux autres porteurs doivent la saisir, afin que le poids soit également réparti entre eux tous.*

Ils doivent prendre la plaque au milieu des côtés du parallélogramme non adjacents au premier sommet.

11. *Les côtés d'un triangle* ABC *sont divisés en segments proportionnels par les points* D, E, F; *c'est-à-dire que l'on a*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}.$$

Montrer que le centre de gravité de l'aire du triangle DEF *coïncide avec celui de l'aire du premier triangle.*

Démonstration. — On sait que le centre de gravité de l'aire d'un triangle coïncide avec celui de trois poids égaux placés aux sommets.

Plaçons aux extrémités de chaque côté du triangle ABC deux poids, proportionnels aux segments adjacents, et dont la somme soit égale à P. Chaque sommet portera le même poids P. Or, les deux poids appliqués à l'un quelconque des côtés, BC, ont pour résultante un poids P appliqué en D. Donc trois poids P, appliqués aux sommets du premier triangle, ont même résultante que trois poids égaux appliqués aux sommets du second triangle; il s'ensuit que les deux aires triangulaires ont même centre de gravité.

On peut en conclure que les médianes des deux triangles se coupent au même point.

12. *Un jeu de cartes est placé sur la table. On avance la carte de dessus dans le sens de sa longueur, aussi loin qu'elle peut se tenir horizontale. Sans déranger la position de cette première carte sur la seconde, on avance celle-ci, autant que possible. Sans déranger les positions relatives des trois premières cartes, on avance pareillement la troisième; et ainsi de suite, jusqu'à la carte de dessous qui reste immobile.*

On demande de déterminer les distances dont les cartes successives avancent l'une sur l'autre.

Les distances cherchées sont les produits de la demi-longueur d'une carte par les termes successifs de la progression harmonique

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots.$$

La courbe qui passe par les extrémités des cartes est une logarithmique.

SECTION XI.

THÉORÈME DE GULDIN.

Lorsqu'une aire plane tourne autour d'un axe extérieur situé dans son plan, le volume du solide engendré est égal à celui du prisme qui aurait pour base l'aire génératrice, et pour hauteur la longueur de l'arc de cercle parcouru par le centre de gravité de l'aire.

Lorsqu'une courbe plane tourne autour d'un axe extérieur situé dans son plan, l'aire de la surface engendrée est égale à celle du rectangle dont les côtés seraient égaux en longueur à la courbe génératrice et à l'arc du cercle parcouru par le centre de gravité de la courbe.

Il est clair que la figure mobile doit être située tout entière d'un même côté de l'axe de rotation.

Ces deux propositions furent d'abord énoncées par Pappus, géomètre d'Alexandrie, dans la préface du livre VIIe de ses *Collections mathématiques* (*) ; toutefois on les nomme ordinairement *théorèmes de Guldin*, parce que ce savant jésuite les a démontrées et signalées à l'attention des géomètres par des applications élégantes, dans son Traité *De centro gravitatis*, lib. II et III (1635.)

1. *L'aire comprise entre une parabole, l'axe de cette courbe et une ordonnée perpendiculaire exécute une révolution complète autour de l'ordonnée. Déterminer le volume du solide engendré.*

Soient y l'ordonnée, x sa distance au sommet, $\bar{x}$ la distance de cette même ordonnée au centre de gravité de l'aire.

(*) Cet ouvrage fut publié pour la première fois dans l'année 1588.

Le volume cherché est

$$V = 2\pi\bar{x} \times \text{aire}.$$

Or, $\bar{x} = \frac{2}{5}x$, et l'aire est égale à $\frac{2}{3}xy$; par conséquent

$$V = \frac{8}{15}\pi x^2 y.$$

On peut observer que le volume du cylindre engendré par la révolution du rectangle construit sur l'ordonnée y et l'abscisse x tournant autour de la même ordonnée, est égal à

$$2\pi \cdot \frac{1}{2}x.xy, \quad \text{ou} \quad \pi x^2 y, \quad \text{ou} \frac{15}{8}V.$$

Ce problème fut proposé par Kepler dans sa *Stéréométrie*, et résolu par Guldin, *De centro gravitatis*, lib. II, cap. XII, prop. 6.

2. *Déterminer le centre de gravité d'un arc de cercle.*

Faisons tourner l'arc de cercle autour d'un diamètre parallèle à sa corde. Il engendre une zone sphérique dont la surface est égale au produit de 2π par le rayon et par la corde. Or, d'après le théorème de Guldin, cette même surface est égale au produit de l'arc et de la circonférence décrite par le centre de gravité de l'arc.

Soit $\bar{x}$ la distance de ce centre de gravité au diamètre. Nous avons

$$2\pi \times \text{rayon} \times \text{corde} = \text{arc} \times 2\pi\bar{x};$$

d'où

$$\bar{x} = \frac{\text{rayon} \times \text{corde}}{\text{arc}}.$$

3. Le théorème de Guldin subsiste quelque petit que soit l'angle décrit par la figure mobile dans sa rotation autour d'une droite tracée dans son plan. Il s'ensuit que

si l'on imagine un plan qui roule sans glisser sur une surface développable, une aire tracée dans ce plan engendre dans ce mouvement un volume égal au produit de cette aire par la longueur du chemin que décrit son centre de gravité. De même, une ligne tracée sur le plan engendre une surface égale au produit de la longueur de cette ligne par la longueur du chemin que parcourt son centre de gravité.

On suppose que la figure tracée dans le plan mobile reste toujours d'un même côté par rapport à la droite mobile de contact entre le plan et la surface développable.

Exemple. — *Un plan roule sans glisser sur un cylindre circulaire. Calculer le volume et la surface du solide qu'engendre un cercle tracé sur le plan.*

Soient a le rayon du cercle, r le rayon du cylindre, b la distance initiale du centre du cercle à la génératrice de contact, ω l'angle décrit par le plan, ou, si l'on veut, l'angle décrit par un plan mobile qui passerait constamment par l'axe du cylindre et par la génératrice de contact.

La distance du centre du cercle à la génératrice de contact est $b + r\omega$; la longueur de l'arc de développante de cercle décrit par ce centre est donc

$$\int_0^\omega (b + r\omega)\, d\omega = \omega\left(b + \frac{1}{2} r\omega\right).$$

Il s'ensuit que le volume du solide engendré est

$$\pi a^2 \omega \left(b + \frac{1}{2} r\omega\right),$$

et sa surface courbe

$$2\pi a \omega \left(b + \frac{1}{2} r\omega\right).$$

4. *Déterminer le volume et la surface de l'anneau engendré par la révolution d'un cercle autour d'un axe extérieur situé dans le même plan.*

Si l'on représente par a le rayon du cercle et par b la distance de son centre à l'axe, on trouve que le volume est $2\pi^2 a^2 b$, et la surface $4\pi^2 ab$.

5. *Déterminer le volume du solide engendré par la demi-révolution d'une ellipse autour d'un axe extérieur situé dans son plan.*

Soient $2a$, $2b$ les axes de l'ellipse, et c la distance de son centre à l'axe de révolution. Le volume cherché est égal à $\pi^2 abc$.

6. *Déterminer le volume engendré par l'aire comprise entre une parabole, l'axe de cette courbe et une ordonnée perpendiculaire, lorsque cette aire tourne d'un angle θ autour de la tangente au sommet.*

Si l'on nomme y l'ordonnée et x sa distance au sommet, on trouve que le volume cherché est égal à $\frac{2}{5}\theta x^2 y$.

7. *Déterminer le volume et la surface du solide engendré par la révolution d'un arc entier de cycloïde autour de sa base.*

Soit a le rayon du cercle générateur de la cycloïde.

On trouve que le volume est $5\pi^2 a^3$, et la surface $\frac{64}{3}\pi a^2$.

8. *Déterminer le volume et la surface du solide engendré par la révolution de la moitié d'un arc de cycloïde autour de l'axe de cette courbe.*

Si l'on nomme a le rayon du cercle générateur de la

cycloïde, on trouve que le volume est $\pi a^3 \left(\frac{8}{3} + \frac{\pi^2}{2}\right)$, et la surface $8\pi a^2 \left(\pi - \frac{4}{3}\right)$.

9. *Déterminer le volume du solide engendré par la révolution d'un triangle rectangle autour de son hypoténuse.*

Si les côtés de l'angle droit sont a et b, le volume cherché est

$$\frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

CHAPITRE II.

ÉQUILIBRE D'UN POINT MATÉRIEL.

Soient P l'une quelconque des forces qui sollicitent un point matériel M; α, β, γ les angles que forme la direction de cette force avec trois droites qui ne sont pas parallèles à un même plan, et Σ un signe sommatoire qui s'étend à toutes les forces P.

Pour que le point M reste en équilibre, il faut et il suffit que la somme des projections des forces sur chacune des droites fixes soit nulle, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\Sigma P \cos\alpha = 0, \quad \Sigma P \cos\beta = 0, \quad \Sigma P \cos\gamma = 0.$$

Stevin, de Bruges (*), énonça le premier les conditions d'équilibre d'un point matériel. Après avoir examiné la condition d'équilibre d'un point pesant posé sur un plan incliné et retenu par une force parallèle à ce plan, il en conclut que, généralement, pour que trois forces se fassent équilibre autour d'un point, il faut et il suffit qu'elles soient proportionnelles aux côtés d'un triangle formé par des parallèles à leurs directions. Un principe aussi important demandait une démonstration rigoureuse; Roberval (**) la donna en s'aidant de la considération du levier.

Le théorème du parallélogramme des forces n'est qu'une simple modification du principe de Stevin; toutefois, il ne fut énoncé qu'un siècle plus tard par Newton (***) et

(*) Beghinselen der Waaghkonst; 1586. Ier livre de la *Statique*, prop. 19.
(**) *Traité de Mécanique;* 1636.
(***) *Principia,* lex III, cor. 2; 1687.

Varignon (*) qui le découvrirent presque simultanément. Daniel Bernoulli (**) fut le premier qui démontra ce théorème comme principe de Statique et sans employer la considération du mouvement. Depuis cette époque, le théorème du parallélogramme des forces a été démontré de bien des manières; Jacobi (***) en a recueilli dix-huit démonstrations de différents auteurs.

Ajoutons encore que la même année où Newton et Varignon énoncèrent la loi du parallélogramme des forces, Lami (****) publia la proposition suivante, qui n'est, pour ainsi dire, qu'un nouvel énoncé de celle du parallélogramme : *Lorsqu'un point matériel reste en équilibre sous l'action de trois forces* P, Q, R, *on a*

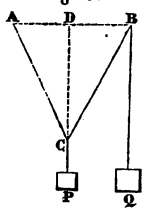
$$P : Q : R :: \sin(\widehat{Q, R}) : \sin(\widehat{R, P}) : \sin(\widehat{P, Q}).$$

SECTION I.

ÉQUILIBRE SANS FROTTEMENT. — ATTRACTION.

1. *Un fil* ACBQ, *parfaitement flexible, est attaché en un point fixe par l'une de ses extrémités* A, *passe dans un anneau* B *situé à la même hauteur que le point* A, *et supporte un poids* Q *par son autre extrémité. En un point* C *de la partie du fil qui est comprise entre* A *et* B, *on fixe un poids* P *tel, que, lorsque le système est en équilibre, le point* C *se trouve à égale distance des verticales menées par* A *et* B. *Déterminer le rapport des poids* P *et* Q.

Fig. 3.



(*) *Projet de la nouvelle Mécanique*; 1687.

(**) *Comment. Petrop.*, t. I, p. 126; 1726.

(***) WHEWELL'S *Philosophy of the inductive sciences*, t. I, p. 197.

(****) *Nouvelle manière de démontrer les principaux théorèmes des éléments de Mécanique.*

On néglige le poids du fil et le frottement sur l'anneau.

Soit CD une perpendiculaire abaissée du point C sur la droite AB; posons

$$AB = a, \quad AC = b, \quad \widehat{ACD} = \theta,$$

et nommons T la tension du fil AC.

Il est clair que la tension du fil BC est égale à Q, et, puisque D est à égale distance de A et de B, on a

$$\widehat{BCD} = \theta.$$

Ceci posé, projetons les trois forces P, Q, T, qui sollicitent le point C, successivement sur une ligne horizontale et sur une ligne verticale; il vient

$$T \sin\theta = Q \sin\theta,$$
$$(T + Q)\cos\theta = P;$$

d'ailleurs

$$\frac{a}{2} = b \sin\theta.$$

Si l'on élimine T et θ entre ces trois équations, on trouve

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{b}.$$

2. *Un point matériel* M, *posé sur la surface d'un ellipsoïde de révolution, est attiré vers les foyers* F, F′ *par deux forces proportionnelles à* $\overline{MF}^m$ *et* $\overline{MF'}^{m'}$. *Déterminer la position d'équilibre.*

On néglige le frottement du point matériel sur la surface.

Soient $2a$ l'axe de révolution, et r, r' les distances du point matériel aux foyers.

Si nous considérons la section faite dans la surface par le plan qui contient les foyers et le point matériel, et que nous projetions les deux forces sur la tangente en ce point à l'ellipse de section, en observant que cette tangente est également inclinée sur les deux rayons vecteurs, nous aurons la condition d'équilibre

$$r^m = r'^{m'},$$

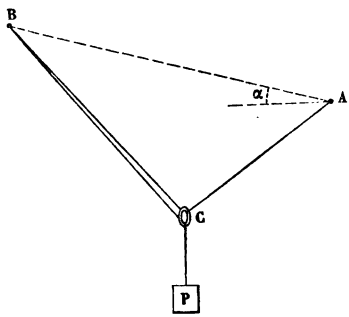
qui, avec la relation

$$r + r' = 2a,$$

détermine les distances r, r'.

3. *Un fil* ACB *inextensible et sans poids, de longueur donnée, est attaché par ses extrémités à deux points fixes* A, B. *Un autre fil inextensible et sans poids est attaché au point* B, *passe dans un très-petit anneau pesant* C, *qui est lui-même enfilé dans le premier fil* ACB, *et porte à son extrémité inférieure un poids* P.

Fig. 4.



Déterminer la position d'équilibre d'un tel système.

Soient A, B, C les angles et a, b, c les côtés du triangle ABC, $2p$ son périmètre, α l'angle que fait AB au-dessus de l'horizontale, μ le poids de l'anneau C.

D'après les formules bien connues qui donnent les angles d'un triangle en fonction de ses côtés, on a

$$(1) \qquad \operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2} = \frac{p-c}{p}.$$

Pour exprimer que les forces appliquées au point C se font équilibre, il suffit d'écrire que leurs projections horizontales et verticales se détruisent séparément. Il vient, en nommant t la tension du fil ACB,

$$(P + t)\cos(\alpha + B) = t\cos(A - \alpha)$$

et

$$(P + t)\sin(\alpha + B) + t\sin(A - \alpha) = P + \mu.$$

De la première de ces équations on tire la valeur de t, on la reporte dans la seconde; alors cette dernière, en ayant égard à la relation (1), peut se mettre sous la forme

$$\operatorname{tang}\frac{B}{2} - \operatorname{tang}\frac{A}{2} = \frac{Pc - (2p - c)(P + \mu)\sin\alpha}{p(P + \mu)\cos\alpha}.$$

On connaît le produit et la différence de $\operatorname{tang}\frac{A}{2}$ et $\operatorname{tang}\frac{B}{2}$, on sait trouver ces quantités à l'aide d'une équation du deuxième degré.

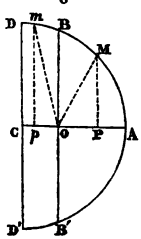
Quand on néglige le poids μ de l'anneau, on trouve

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2} = \frac{p - c}{p}\,\frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{tang}\frac{B}{2} = \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

4. *Toutes les molécules d'une demi-sphère solide et homogène sont douées d'un pouvoir attractif en raison inverse du carré de la distance. En quel lieu de l'axe de ce corps faut-il placer un point matériel pour qu'il reste en équilibre sous l'action des forces attractives ?*

Fig. 5.



Soient CA l'axe de la demi-sphère, DCD' un diamètre de la base, O la position cherchée du point matériel, DAD' l'intersection de la surface de la demi-sphère par le plan des droites CA,

DCD′; traçons la droite BOB′ perpendiculaire à CA. D'un point M pris sur l'arc BA abaissons la perpendiculaire MP sur l'axe, et d'un point m pris sur l'arc BD abaissons de même la perpendiculaire mp. Posons

$$CA = a = CD, \quad CO = c, \quad OB = b, \quad OD = b', \quad OM = r,$$
$$OP = x, \quad MP = y, \quad Om = r', \quad Op = x', \quad mp = y';$$

nommons μ l'attraction de l'unité de masse à l'unité de distance, et ρ la densité de la sphère.

Ceci posé, l'attraction exercée sur le point O par une tranche MPM′ perpendiculaire à l'axe et d'épaisseur dx est dirigée suivant OA, et a pour expression

$$2\pi\mu\rho\, dx \int_0^y \frac{xy\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi\mu\rho\, x\,dx \int_{\sqrt{r^2-x^2}}^0 \frac{d(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{dy}\, dy$$
$$= 2\pi\mu\rho \left(1 - \frac{x}{r}\right) dx;$$

par conséquent, l'attraction X du segment de sphère OBAB′ est dirigée suivant OA, et est égale à

$$2\pi\mu\rho \int_0^{a-c} \left(1 - \frac{x}{r}\right) dx = 2\pi\mu\rho \left(a - c - \int_0^{a-c} \frac{x}{r}\, dx\right).$$

De même, l'attraction X′ de la tranche CDBOB′D′ est dirigée suivant OC, et a pour valeur

$$2\pi\mu\rho \left(c - \int_0^c \frac{x'}{r'}\, dx'\right).$$

Or la Géométrie nous donne la relation

$$r^2 = x^2 + (a + x + c)(a - x - c) = b^2 - 2cx,$$

d'où l'on tire

$$c\,dx = -r\,dr,$$

ou

$$\frac{x\,dx}{r} = -\frac{b^2 - r^2}{2c^2}\, dr;$$

par conséquent,

$$X = 2\pi\mu\rho\left[a - c + \frac{1}{2c^2}\int_b^{a-c}(b^2 - r^2)\,dr\right].$$

On trouve pareillement

$$r'^2 = b^2 + 2cx',$$

$$\frac{x'\,dx'}{r'} = -\frac{b^2 - r'^2}{2c^2}\,dr',$$

$$X' = 2\pi\mu\rho\left[c + \frac{1}{2c^2}\int_b^{b'}(b^2 - r'^2)\,dr'\right],$$

ou, ce qui est la même chose,

$$X' = 2\pi\mu\rho\left[c + \frac{1}{2c^2}\int_b^{b'}(b^2 - r^2)\,dr\right].$$

La condition d'équilibre

$$X = X'$$

peut donc s'écrire

$$a - 2c = \frac{1}{2c^2}\int_{a-c}^{b'}(b^2 - r^2)\,dr$$

$$= \frac{1}{2c^2}\,b^2(b' + c - a) + \frac{1}{6c^2}[(a - c)^3 - b'^3].$$

Éliminant b et b' par les relations

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad \text{et} \quad b'^2 = a^2 + c^2,$$

il vient d'abord

$$(1) \qquad a^3 - 4c^3 = (a^2 - 2c^2)\sqrt{a^2 + c^2};$$

puis, en élevant au carré,

$$12c^4 - 8a^3c + 3a^4 = 0.$$

Cette équation détermine c. Elle n'a que deux racines

réelles, toutes deux positives. L'une d'elles est à peu près égale à $\frac{2}{3}a$. Cette racine est étrangère au problème, elle a été introduite en élevant au carré l'équation (1); car si on la reporte dans cette équation, elle ne la vérifie qu'à la condition qu'on prendra le radical, c'est-à-dire b', avec le signe —. L'autre racine est approximativement

$$c = \frac{3}{7}a;$$

c'est elle qui résout le problème.

Diarian Repository, p. 629.

5. *La plus grande attraction qu'une masse homogène de figure quelconque puisse exercer, suivant la loi de la gravitation universelle, sur un point placé comme l'on voudra, est à l'attraction que la même masse, réduite en sphère homogène et de même volume, exercerait sur un point placé à sa surface, dans le rapport de* 3 *à* $\sqrt[3]{25}$.

Le corps de plus grande attraction, sous une masse et un volume donnés, jouit de cette propriété, que les molécules situées à sa surface exercent des attractions égales suivant la direction de la résultante. En effet, considérons un corps homogène dont toutes les molécules situées à la surface exercent des attractions égales. Si nous déplaçons une de ses molécules, ce ne peut être qu'une molécule de la surface, autrement nous changerions la densité; et cette molécule ne peut être placée qu'à l'extérieur. Or je dis que toute molécule située à l'extérieur attire moins qu'une molécule placée sur la surface primitive.

Prenons le point attiré pour origine de coordonnées polaires, dont l'axe coïncidera avec la direction de l'attraction résultante, et nommons A une constante. La sur-

face d'égale attraction aura son équation de la forme

$$\text{(C)} \qquad \frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{A^2},$$

et il est clair que pour tout point extérieur on aura

$$\frac{\cos\theta}{r^2} < \frac{1}{A^2},$$

c'est-à-dire que l'attraction sera moindre que pour un point de la surface.

De là il résulte que nous pouvons prendre l'équation (C) pour représenter la surface du corps de plus grande attraction, sous une masse et un volume donnés. Nous supposerons la densité du corps égale à l'unité, et nous prendrons pour unité de force l'attraction de l'unité de masse à l'unité de distance.

D'après cela, le volume du corps est

$$2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^r r^2\sin\theta\,d\theta\,dr = \frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\sin\theta\,d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\pi A^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{3}{2}}\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{4}{15}\pi A^3,$$

et l'attraction qu'il exerce a pour valeur

$$2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^r \sin\theta\cos\theta\,d\theta\,dr = 2\pi A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{3}{2}}\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{4}{5}\pi A.$$

Le rayon R de la sphère, qui a même volume et même masse, doit vérifier l'équation

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{15}\pi A^3;$$

d'où

$$R = \frac{A}{\sqrt[3]{5}}.$$

On en conclut que l'attraction de cette sphère sur un point placé à sa surface est égale à

$$\frac{4}{3}\pi R = \frac{4}{3}\frac{\pi A}{\sqrt[3]{5}};$$

par conséquent, le rapport de l'attraction du premier corps à celle de la sphère a pour expression

$$\frac{\frac{4}{5}\pi A}{\frac{4}{3}\frac{\pi A}{\sqrt[3]{5}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{25}}.$$

Ce rapport diffère peu de l'unité. Il s'ensuit que l'attraction newtonienne ne suffit pas pour expliquer l'adhérence des molécules dans un corps solide. Il faut nécessairement admettre des forces moléculaires qui agissent avec une intensité beaucoup plus grande à de petites distances.

Le solide qui à égalité de volume exerce la plus grande attraction sur un point matériel est à peu près semblable à un œuf, dont le sommet le plus allongé serait au point attiré. La longueur de l'axe étant A, la plus grande ordonnée de la courbe méridienne est

$$A\sqrt[4]{\frac{2}{27}};$$

son abscisse ou sa distance au sommet est

$$\sqrt{2}\,A\sqrt[4]{\frac{2}{27}}.$$

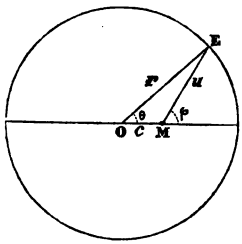
Marquis DE SAINT-JACQUES, *Mémoires des Savants étrangers*, t. I, p. 175; 1750.

GAUSS, *Principia generalia theoriæ figuræ fluidorum in statu æquilibrii*; Gœttingue, 1830.

6. **Démontrer la proposition suivante :**

Si l'on admet que l'attraction de la matière ne dépend que de la distance, la seule loi d'attraction, suivant laquelle une couche sphérique homogène n'exerce aucune action sur un point intérieur, est celle de l'attraction en raison inverse du carré de la distance; mais si l'on suppose que l'attraction dépend à la fois de la distance et du rayon de la couche sphérique, il est une infinité de lois d'après lesquelles la couche n'exerce aucune action sur le point intérieur.

Fig. 6.



Soient r le rayon intérieur de la couche;

dr l'épaisseur infiniment petite de cette couche;

a la distance d'un élément E de cette couche au point attiré M;

c la distance du centre O au point M;

θ l'angle que le rayon OE fait avec la direction OM;

φ l'angle que la droite ME fait avec la même direction;

et $f(u, r)$ l'attraction de l'unité de volume située sur la couche à la distance u du point attiré.

La direction de l'attraction résultante coïncide évidemment avec la droite MO, et la valeur de cette résultante est

$$R = 2\pi r^2 dr \int_0^\pi \cos\varphi \sin\theta f(u, r)\, d\theta.$$

Or on a

$$\frac{u}{r} = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}, \quad \frac{c}{r} = \frac{\sin(\theta + \varphi)}{\sin\varphi};$$

différentiant ces équations par rapport à u, c et φ, il

vient

$$\cos\varphi = \frac{du}{dc},$$

et si l'on observe que

$$\frac{du}{dc} f(u, r) = \frac{d}{dc} \int f(u, r)\, du,$$

car r est une constante, on verra aisément que l'attraction résultante peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{R} = 2\pi r^2 dr \frac{d}{dc} \int_0^\pi \left[\sin\theta \int f(u, r)\, du \right] d\theta.$$

Nous pouvons exprimer la variable θ en fonction de la variable u : ces variables sont unies par la relation

$$u^2 = c^2 + r^2 - 2cr\cos\theta;$$

d'où

$$\sin\theta\, d\theta = \frac{u}{cr} du.$$

Posons, pour abréger,

$$(1) \qquad \int f(u, r)\, du = \mathrm{F}(u, r),$$

$$(2) \qquad \int u\mathrm{F}(u, r)\, du = F(u, r),$$

et observons qu'aux limites $\theta = 0$, $\theta = \pi$ correspondent les limites $u = r - c$, $u = r + c$; alors il vient

$$(3) \qquad \mathrm{R} = 2\pi r dr . \frac{d}{dc} \left[\frac{F(r + c, r) - F(r - c, r)}{c} \right].$$

Pour que l'attraction R soit nulle, il faut que la quantité

$$\frac{F(r + c, r) - F(r - c, r)}{c}$$

soit indépendante de c; nous pourrons donc poser

$$F(r + c, r) - F(r - c, r) = c\varphi(r),$$

$\varphi(r)$ étant une quantité indépendante de c. On en conclut, par une double différentiation relative à c,

$$(4) \qquad F''_c(r+c, r) - F''_c(r-c, r) = 0.$$

Maintenant, il nous faut distinguer deux hypothèses. Admettons d'abord que la loi de l'attraction soit indépendante du rayon de la couche; alors $f(u, r)$ se réduit à $f(u)$, et l'équation précédente devient

$$F''_c(r+c) - F''_c(r-c) = 0.$$

Ici r et c sont quelconques; il en est de même de leur somme $r+c$ et de leur différence $r-c$; d'ailleurs

$$F''_c(r-c) = F''_{r-c}(r-c);$$

par conséquent, la dérivée seconde $F''(u)$ est indépendante de u, et la dérivée troisième $F'''(u)$ est nulle.

Or, d'après l'équation (2), on a

$$(5) \qquad \begin{aligned} F'(u) &= u\mathrm{F}(u), \\ F''(u) &= \mathrm{F}(u) + u\mathrm{F}'(u), \\ F'''(u) &= 2\mathrm{F}'(u) + u\mathrm{F}''(u), \end{aligned}$$

et, si l'on a égard à l'équation (1),

$$F'''(u) = 2f(u) + uf'(u).$$

Ainsi la fonction $f(u)$, qui représente la loi de l'attraction, doit vérifier l'équation

$$\begin{aligned} uf'(u) + 2f(u) &= 0, \\ u^2 f'(u) + 2uf(u) &= 0, \end{aligned}$$

laquelle donne, par intégration,

$$u^2 f(u) = \text{const} = \mathrm{A},$$

$$f(u) = \frac{\mathrm{A}}{u^2}:$$

c'est la loi de la nature.

7. Passons à la seconde hypothèse, où l'on suppose que la loi de l'attraction dépend du rayon de la couche.

Dans l'équation (4), le rayon r ne peut être considéré comme une quantité arbitraire; par conséquent, on ne peut se donner à volonté qu'une seule des quantités $r+c$, $r-c$. Nous prendrons

$$r+c=u, \quad \text{d'où} \quad r-c=2r-u.$$

Alors l'équation (4) nous donne

$$F''_u(u,r)-F''_{2r-u}(2r-u,r)=0,$$

ou, d'après la formule (5), jointe à l'équation (1),

$$F(u,r)+uf(u,r)-F(2r-u,r)-(2r-u)f(2r-u,r)=0.$$

Différentions par rapport à u, il vient

$$2f(u,r)+uf'_u(u,r)+2f(2r-u,r)$$
$$+(2r-u)f'_{2r-u}(2r-u,r)=0.$$

Cette équation nous montre que la fonction $f(u,r)$ est assujettie à cette seule condition, que la quantité

$$2f(u,r)+uf'_u(u,r)$$

change de signe et non de valeur, lorsque l'on y change u en $2r-u$; cela revient à dire que la quantité dont il s'agit est l'ordonnée correspondante à l'abscisse u, dans une courbe qui a pour centre le point de l'axe des abscisses correspondant à $u=r$.

Soit

$$y=\varphi(u,r)$$

l'ordonnée d'une courbe qui jouit de cette propriété. On pourra poser

$$2uf(u,r)+u^2f'_u(u,r)=u\varphi(u,r);$$

alors

$$f(u,r)=\frac{1}{u^2}\int u\varphi(u,r)\,du$$

représentera une loi d'attraction pour laquelle une couche sphérique de rayon r n'exercera aucune attraction sur un point intérieur.

Prenons, par exemple,

$$\gamma = a(r - u),$$

a désignant une constante.

Nous aurons

$$f(u, r) = a\left(\frac{1}{2}r - \frac{1}{3}u\right).$$

La première partie du théorème qui précède est de Laplace (*Mécanique céleste*, liv. II, chap. II); la seconde partie, relative à une loi d'attraction qui dépend du rayon de la couche, a été remarquée par M. Bertrand dans son Cours au Collége de France.

8. *Trouver toutes les lois d'attraction qui ne dépendent que de la distance, et suivant lesquelles une couche sphérique homogène attire un point extérieur comme si elle était tout entière condensée en son centre.*

Si nous conservons la notation du théorème précédent, l'équation (3) de ce théorème nous donne, dans le cas actuel,

$$2\pi r dr \frac{d}{dc}\left[\frac{F(c+r) - F(c-r)}{c}\right] = 4\pi r^2 dr f(c),$$

d'où l'on tire

$$F(c+r) - F(c-r) = 2rc\int f(c)\,dc + c\varphi(r),$$

$\varphi(r)$ étant une quantité indépendante de c.

Dans cette dernière équation, les dérivées secondes du premier membre par rapport à c et par rapport à r sont évidemment égales; nous pouvons donc égaler entre elles

les dérivées secondes du deuxième membre; il vient alors

$$\frac{2f(c)}{c} + \frac{df(c)}{dc} = \frac{1}{2r}\frac{d^2\varphi(r)}{dr^2}.$$

Le premier membre de cette équation est indépendant de r, le second est indépendant de c; il faut donc que chacun des deux membres soit une constante : nous nommerons cette constante $3A$; en sorte que

$$\frac{2f(c)}{c} + \frac{df(c)}{dc} = 3A.$$

Intégrons, et nommons B une nouvelle constante; il viendra, en remplaçant c par u,

$$f(u) = Au + \frac{B}{u^2}.$$

Telle est la forme des lois d'attraction suivant lesquelles une couche sphérique attire un point extérieur comme si elle était condensée en son centre. On voit que, parmi les lois d'attraction qui jouissent de cette propriété, la loi de la nature est la seule d'après laquelle l'attraction soit peu considérable à de grandes distances.

LAPLACE, *Mécanique céleste*, liv. II, chap. II.

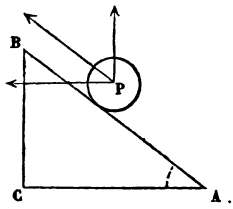
9. *Un fil très-mince* AOB, *soutenu par ses deux extrémités, porte par l'intermédiaire d'un anneau* O *un poids précisément égal à la plus grande tension que le fil puisse supporter sans se rompre. On demande quelle est la limite que l'angle* AOB *ne peut dépasser quand on ouvre de plus en plus cet angle en écartant les extrémités du fil. On négligera le poids du fil et celui de l'anneau.*

Il est aisé de reconnaître que le fil se brisera dès que l'angle AOB dépassera 120 degrés; car la tension du fil atteint sa limite quand le triangle formé par des paral-

lèles aux trois forces qui sollicitent le point O devient équilatéral.

10. *Un poids* P *est maintenu en équilibre sur un plan incliné* BA *par l'action de trois forces égales à* $\frac{P}{3}$, *et dirigées, l'une en sens contraire de la pesanteur, l'autre dans la direction* AB, *la troisième suivant l'horizontale* AC. *Quelle est l'inclinaison du plan* BA *sur l'horizon?*

Fig. 7.



Cette inclinaison est égale à $2 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2}$.

11. *Deux forces données* F, F′, *respectivement parallèles à la base et à la longueur d'un plan incliné, sollicitent alternativement une même molécule pesante posée sur ce plan. Quel doit être le poids* P *de cette molécule pour qu'elle reste en repos?*

On trouve

$$P = \frac{FF'}{\sqrt{F^2 - F'^2}}.$$

12. *Deux poids* P et Q *sont unis par un fil* PCQ *engagé sur une poulie* C; *le poids* Q *pend librement, le poids* P *s'appuie sur un plan qui fait avec l'horizon un angle connu* α, *et tout le système est en équilibre. Déterminer l'angle que le fil* CP *forme avec le plan incliné et la pression que le point* P *exerce sur ce plan.*

Si l'on nomme R la pression et θ l'angle cherché, on trouve

$$\theta = \operatorname{arc\,cos} \frac{P \sin \alpha}{Q}, \quad R = P \cos \alpha - \sqrt{Q^2 - P^2 \sin^2 \alpha}.$$

13. *On courbe un tube très-étroit suivant une parabole dont l'axe est dirigé verticalement de bas en haut, et dans l'intérieur de ce tube on place un point matériel qui peut glisser librement. On suppose que ce point est sollicité à la fois par la pesanteur et par une force répulsive émanée de l'axe de la parabole, proportionnelle à la distance de cet axe. Trouver les conditions de l'équilibre du point.*

Soit μ l'intensité de la force émanée de l'axe lorsqu'elle s'exerce à l'unité de distance.

Si le paramètre de la parabole est égal à $\frac{g}{\mu}$, le point placé où l'on voudra dans le tube y restera en équilibre ; si le paramètre est différent de $\frac{g}{\mu}$, l'équilibre est impossible.

14. *Un triangle isocèle est formé par trois lignes matérielles et homogènes, qui sont douées d'un pouvoir attractif en raison inverse du carré de la distance. Un point matériel est placé en un point donné de la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base, et reste en équilibre sous l'action des forces émanées des côtés. Déterminer l'angle au sommet.*

Soient a et b les distances du point matériel au sommet et à la base.

L'angle au sommet est égal à $2 \operatorname{arc\,sin} \left(\frac{a}{b}\right)$.

15. *Deux droites matérielles et homogènes* AB, AC *se coupent à angle droit, et attirent inversement au carré de la distance un point matériel situé au pied de la perpendiculaire* AP *abaissée de* A *sur* BC. *Déterminer la grandeur et la direction de la force nécessaire pour maintenir en équilibre le point attiré.*

Soient

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c,$$

m la masse répartie sur l'unité de longueur dans les droites matérielles, et μ l'attraction de l'unité de masse à l'unité de distance.

La force cherchée est égale à $\sqrt{2}\, m \frac{\mu a^3}{b^2 c^2}$, et fait un angle de 45 degrés avec chacune des deux droites AB, AC.

16. *Un triangle* ABC *est formé par trois droites matérielles, homogènes et de densités différentes, qui attirent en raison inverse du carré de la distance. Déterminer les conditions d'équilibre d'un point matériel placé dans l'intérieur du triangle.*

Soient λ, μ, ν les densités des côtés BC, CA, AB, et p, q, r les distances du point matériel à ces mêmes côtés.

Les conditions d'équilibre sont

$$\frac{p}{\lambda} = \frac{q}{\mu} = \frac{r}{\nu}.$$

Lorsque les côtés des triangles sont de même densité, le point matériel doit être placé au centre du cercle inscrit.

Si du point attiré, comme centre, on construit un cercle tangent à la droite qui l'attire et de même nature, puis que l'on trace deux rayons quelconques, le segment de la droite et l'arc du cercle qui sont compris entre les deux rayons exercent sur le centre des attractions égales (*).

En effet, supposons que les deux rayons soient infiniment voisins. Ils forment sur l'élément du cercle et sur celui de la droite qu'ils interceptent deux triangles de même hauteur : ces deux triangles sont donc entre eux

(*) Ce théorème se trouve dans la *Dynamique* de Earnshaw.

comme leurs bases. Si nous prouvons que les mêmes triangles sont entre eux comme les carrés des distances de leurs bases infiniment petites au centre du cercle, il sera démontré que les éléments du cercle et de la droite compris entre les deux mêmes rayons ont des longueurs ou des masses proportionnelles aux carrés de leurs distances au point attiré, et par suite qu'ils exercent sur ce point des attractions égales. Soient A et B nos deux triangles. On peut remplacer l'un d'eux A par un triangle A′ semblable au triangle B, sans altérer les grands côtés et la surface des triangles, si ce n'est de quantités infiniment petites par rapport à ces quantités elles-mêmes. Or les triangles A′ et B étant entre eux comme les carrés de leurs grands côtés, il en sera de même à la limite pour les triangles A et B; et à la limite l'un quelconque des grands côtés peut être pris pour la distance de la base au centre du cercle.

On verra de même que, si l'on suppose l'attraction en raison inverse du cube de la distance, un cône intercepte sur une sphère qui a son centre au sommet, et sur un plan tangent de même épaisseur et de même matière, deux surfaces qui attirent également un point matériel placé au sommet.

D'après cela, lorsqu'un point matériel est placé dans l'intérieur d'un tétraèdre, dont les quatre faces sont des plans homogènes de même épaisseur et qui attirent en raison inverse du cube de la distance, les conditions d'équilibre du point sont exprimées par les relations

$$\frac{p}{\lambda}=\frac{q}{\mu}=\frac{r}{\nu}=\frac{s}{\rho},$$

dans lesquelles p, q, r, s représentent les distances du point attiré aux faces du tétraèdre, et λ, μ, ν, ρ les densités de ces faces.

17. *Toute zone sphérique, considérée comme matérielle et homogène, telle que le plan de l'un des cercles de base soit à égale distance du pôle et du plan de la seconde base, attirera le pôle avec une force égale à*

$$\pi\mu\rho \log 2,$$

ρ est la densité, μ est l'attraction de l'unité de masse à l'unité de distance.

18. *Démontrer que l'attraction d'une demi-sphère homogène sur le centre est égale à celle de la sphère entière sur un point de sa surface.*

SECTION II.

ÉQUILIBRE AVEC FROTTEMENT.

Dans la Mécanique rationnelle, on considère ordinairement les corps solides comme tout à fait incompressibles et terminés par des surfaces parfaitement unies. Aussi, quand il s'agit d'un corps pesant qui repose par une face plane sur un plan horizontal fixe, on admet que toute force horizontale appliquée sur ce corps lui communique un mouvement, quelque petite que soit cette force. Dans la réalité, il n'en est pas ainsi : la force appliquée doit dépasser une certaine limite pour produire le mouvement; car les corps de la nature sont plus ou moins compressibles, et toujours terminés par des surfaces qui présentent une multitude de petites aspérités. Il faut donc admettre que, dans le cas d'une force trop faible pour produire le mouvement, la réaction du plan sur la surface en contact ne se compose pas uniquement d'une force normale à la surface, mais aussi d'une force tangentielle égale et contraire à la force appliquée. Cette réaction tangentielle est le *frottement*.

Ce qu'il importe surtout de connaître, c'est la limite que la force de frottement ne peut pas dépasser dans des circonstances données; l'expérience seule peut déterminer cette limite. Voici les résultats auxquels elle a conduit.

Considérons généralement deux corps en contact, l'un d'eux étant fixe. Nommons R la pression normale qui s'exerce entre les deux surfaces, et F la plus grande force que l'on puisse appliquer à l'un des deux corps sur sa surface de contact, et parallèlement à cette surface, sans lui communiquer de mouvement. La force F, que l'on nomme *frottement au départ,* est proportionnelle, pour deux substances données, à l'étendue des surfaces en contact et à la pression partielle qui s'exerce sur une étendue déterminée de ces surfaces, si l'on suppose que la pression totale est également répartie sur tous les points de contact. On énonce ordinairement cette loi de la manière suivante :

Pour deux substances données, le frottement au départ est proportionnel à la pression normale, et quand la pression est la même, il est indépendant de l'étendue des surfaces en contact.

Il en résulte que, si l'on pose

$$F = \mu R,$$

la quantité μ sera constante pour deux mêmes substances, quelles que soient la pression et l'étendue des surfaces en contact. Cette constante μ est nommée *coefficient de frottement.*

Lorsqu'un corps pesant est lancé le long d'un plan horizontal sur lequel il s'appuie par une face plane, on observe que la vitesse imprimée s'épuise peu à peu; tandis qu'elle devrait rester constamment la même, si la réac-

tion du plan était tout entière normale. Il faut donc admettre que la surface en contact éprouve une réaction tangentielle, lors même que le mouvement est établi. Cette réaction est le *frottement dynamique*, ainsi nommé pour le distinguer du frottement au repos ou *frottement statique*. Ces deux frottements se nomment encore *frottements de glissement* ou *frottements de première espèce*, pour les distinguer du *frottement de roulement* ou *frottement de seconde espèce*, dont nous parlerons plus tard (*).

Généralement, lorsque deux corps animés de vitesses différentes glissent l'un sur l'autre, le frottement dynamique est mesuré par une force égale et contraire à la force qu'il faudrait appliquer à l'un des corps sur sa surface de contact et en sens contraire de sa vitesse relative à la seconde surface, pour maintenir le mouvement relatif tel qu'il se continuerait si les deux corps n'exerçaient l'un contre l'autre qu'une simple réaction normale. On voit que le frottement dynamique est une force tangentielle qui tend à égaliser les vitesses des points en contact.

Le frottement dynamique est soumis aux mêmes lois que le frottement statique au départ; de plus, il est indépendant de la vitesse relative des surfaces en contact, au moins dans les cas ordinaires de la pratique. Le coefficient de frottement dynamique est toujours sensiblement inférieur à celui de frottement statique entre les mêmes surfaces.

C'est en vertu de cette dernière loi qu'un corps pesant, d'abord en repos sur un plan dont l'inclinaison est peu inférieure à celle qui ne permettrait plus à l'équilibre de subsister, commence à descendre pour ne plus

(*) *Dynamique*, chap. VII, sect. II.

s'arrêter, dès que l'on produit dans le système un léger ébranlement.

D'après ce que nous avons dit, la composante tangentielle de la réaction totale est égale à μR lorsque le mouvement relatif est sur le point de naître et aussi lorsque le mouvement est établi, pourvu que dans ce cas on entende par μ le coefficient de frottement dynamique. Il en résulte que l'angle de la réaction totale avec la perpendiculaire à la surface de contact a pour tangente le coefficient μ. Cet angle, arc tang μ, se nomme *angle de frottement*. Il est aisé de voir que dans le cas où μ représente le coefficient de *frottement au départ* entre un plan et un corps pesant, le corps glissera sur le plan en vertu de son poids, toutes les fois que l'inclinaison du plan sur l'horizon sera supérieure à l'angle arc tang μ, et restera en repos quand l'inclinaison sera moindre.

Les lois du frottement statique ont été découvertes par Amontons (1). Camus (2) et Désaguliers (3) ont remarqué les premiers que le frottement dynamique est plus petit que le frottement au départ. L'exactitude de ces lois fut longtemps contestée, par suite de l'imperfection des méthodes expérimentales. Les expériences de Muschenbroek (4), de l'abbé Nollet (5), de Coulomb (6) et de Ximénès (7) laissaient encore des doutes; les belles expériences de M. Arthur Morin (8) les ont dissipés. Aujourd'hui ces lois sont universellement adoptées.

---

(1) *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris;* 1699, p. 206.

(2) *Traité des forces mouvantes.*

(3) *Cours de Physique.*

(4) *Introd. ad Phil. nat.*, t. I, cap. IX; 1769. — *Lect. Phys. exper.*, t. I, p. 241.

(5) *Leçons de Phys. expér.*, t. I, p. 230; 1754.

(6) *Savants étrangers* (Acad. des Sciences de Paris), t. X, p. 163; 1785.

(7) *Teoria e pratica delle resist. de' sol. ne' loro attriti;* Pisa, 1782.

(8) *Savants étrangers* (Académie des Sciences de Paris), t. IV; 1833.

Les résultats suivants donneront une idée de la différence qui existe entre les deux coefficients de frottement pour les mêmes substances. Le premier nombre se rapporte au frottement statique, le second au frottement dynamique :

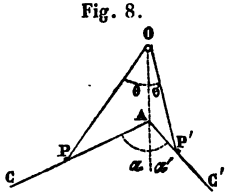
Chêne sur chêne, fibres parallèles, sans enduit, $\mu = \begin{cases} 0,62 \\ 0,48 \end{cases}$

Fer sur chêne, fibres parallèles, mouillées d'eau, $\mu = \begin{cases} 0,65 \\ 0,26 \end{cases}$

Fer sur fonte, ... sans enduit, $\mu = \begin{cases} 0,19 \\ 0,18 \end{cases}$

1. *Deux points pesants* P, P′ *s'appuient sur deux plans inclinés et dépolis* AC, AC′, *et sont réunis par un fil infiniment délié* POP′, *qui s'engage sur une poulie* O *située verticalement au-dessus du sommet commun des deux plans. Quelle est la position des points* P *et* P′, *lorsque le premier est sur le point de glisser dans la direction* AC?

Fig. 8.



Soient α, α' les inclinaisons sur la verticale des plans AC, AC′; θ et θ' celles des portions du fil OP et OP′; T la tension du fil; P et P′ les poids des points désignés par les mêmes lettres; μ et μ' les coefficients de frottement sur les deux plans AC et AC′; R et R′ les réactions normales de ces mêmes plans.

Projetons les forces qui sollicitent le point P, d'abord suivant une parallèle à CA, puis suivant une perpendiculaire. Il vient

$$\mu R + T\cos(\alpha - \theta) = P\cos\alpha,$$
$$R + T\sin(\alpha - \theta) = P\sin\alpha.$$

Si l'on opère de la même manière relativement au point P′, en observant que le frottement est dirigé suivant AC′, on trouve

$$\mu' R' + P' \cos\alpha' = T \cos(\alpha' - \theta'),$$
$$R' + T \sin(\alpha' - \theta') = P' \sin\alpha'.$$

Entre les deux premières équations on élimine R, et entre les deux dernières on élimine R′, puis entre les deux résultats on élimine T, et il vient

$$P'(\cos\alpha' + \mu' \sin\alpha')[\cos(\alpha - \theta) - \mu \sin(\alpha - \theta)]$$
$$= P(\cos\alpha - \mu \sin\alpha)[\cos(\alpha' - \theta') + \mu' \sin(\alpha' - \theta')];$$

ou, si l'on pose $\mu = \operatorname{tang} \varepsilon$, $\mu' = \operatorname{tang} \varepsilon'$,

$$P' \cos(\alpha' - \varepsilon') \cos(\alpha - \theta + \varepsilon) = P \cos(\alpha + \varepsilon) \cos(\alpha' - \theta' - \varepsilon').$$

D'ailleurs, la distance OA et la longueur du cordon étant nommées h et a, la Géométrie donne

$$a = \frac{h \sin\alpha}{\sin(\alpha - \theta)} + \frac{h \sin\alpha'}{\sin(\alpha' - \theta')}.$$

Cette équation, jointe à la précédente, détermine les angles θ, θ' et, par suite, la position des points P, P′.

2. *Un point pesant est posé sur un plan parfaitement poli et incliné à l'horizon d'un angle α. On applique à ce point une force donnée* P, *et l'on demande l'angle ε'' que cette force doit faire avec le plan pour maintenir le point en équilibre. On ne connaît pas le poids du point, mais si l'on suppose entre le point matériel et le plan un coefficient de frottement égal à tang φ, on connaît la demi-somme* S *et la demi-différence* D *du plus grand angle ε' et du plus petit angle ε que la force* P *peut faire avec le plan sans déplacer le point.*

Considérons le plan dépoli dont le coefficient de frot-

tement est tang φ; nommons R sa réaction normale et Q le poids du corps; supposons d'abord que la force P fasse avec le plan l'angle ε.

Projetant les forces d'abord sur une parallèle au plan, puis sur une perpendiculaire, on obtient

$$P\cos\varepsilon = R\,\mathrm{tang}\,\varphi + Q\sin\alpha,$$
$$P\sin\varepsilon + R = Q\cos\alpha.$$

Si l'on élimine R entre ces deux équations, il vient

$$P = Q\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\varepsilon-\varphi)}.$$

Quand la force P fait avec le plan l'angle ε', le calcul est le même, si ce n'est que φ change de signe; on a donc

$$P = Q\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\varepsilon'+\varphi)}.$$

Ces deux dernières équations nous font connaître le poids Q en fonction des quantités données, car si l'on ajoute ces deux équations, on trouve, après quelques réductions,

$$Q = P\frac{\cos S\cos(D+\varphi)}{\sin\alpha\cos\varphi}.$$

Ceci posé, la condition d'équilibre sur le plan sans frottement est

$$P = Q\frac{\sin\alpha}{\cos\varepsilon''};$$

remplaçant Q par sa valeur, il vient

$$\cos\varepsilon'' = \frac{\cos S}{\cos\varphi}\cos(D+\varphi).$$

Telle est l'équation qui détermine l'angle cherché ε''.

3. *Un point pesant est placé sur une circonférence de cercle située dans un plan vertical, et sur laquelle le frottement est égal à la pression. Quelle est la plus basse des positions où le point peut rester immobile?*

Le rayon qui passe au point cherché fait un angle de 45 degrés avec la verticale.

4. *La force nécessaire pour faire monter un corps le long d'un plan incliné est moindre ou plus grande que la force nécessaire à soulever directement le corps, suivant que l'angle de frottement est inférieur ou supérieur à* $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$, α *étant l'inclinaison du plan sur l'horizon.*

CHAPITRE III.

ÉQUILIBRE D'UN SEUL CORPS.

Pour qu'un corps solide reste en équilibre sous l'action des forces qui le sollicitent, deux espèces de conditions sont nécessaires et suffisantes : 1° les trois sommes des projections de toutes les forces sur trois droites, qui ne sont point parallèles à un même plan, doivent être séparément nulles ; 2° les trois sommes des moments des forces par rapport à trois droites non parallèles à un même plan doivent aussi être séparément nulles.

Si l'on nomme A, B, C les projections de l'une quelconque des forces sur les trois droites considérées, et $A'a'$, $B'b'$, $C'c'$ les moments de la même force par rapport à trois droites qui peuvent coïncider avec les premières, et que l'on représente par Σ une somme qui s'étend à toutes les forces appliquées au corps solide, les conditions d'équilibre seront représentées par les deux groupes d'équations

$$\Sigma(A) = 0, \quad \Sigma(B) = 0, \quad \Sigma(C) = 0;$$
$$\Sigma(A'a') = 0, \quad \Sigma(B'b') = 0, \quad \Sigma(C'c') = 0.$$

Lorsque toutes les forces agissent dans un même plan, il suffit de considérer leurs projections sur deux droites non parallèles, situées dans ce plan, et de prendre les moments par rapport à un point du plan ; alors les équations d'équilibre se réduisent à

$$\Sigma(A) = 0, \quad \Sigma(B) = 0;$$
$$\Sigma(C'c') = 0.$$

Archimède a déterminé les conditions d'équilibre d'un levier sollicité par des forces perpendiculaires au bras; la loi fut ensuite étendue à des forces obliques par le peintre Léonard de Vinci, et, peu de temps après, Stevin découvrit les conditions d'équilibre d'un point matériel.

Plus tard, Varignon démontra un beau théorème de Géométrie, qui lui servit d'intermédiaire pour passer de la loi du parallélogramme des forces à celle des moments :

Si l'on construit trois triangles qui aient pour bases la diagonale et les deux côtés d'un parallélogramme, et pour sommet commun un point situé dans le plan du parallélogramme, le triangle formé sur la diagonale est égal à la somme ou à la différence des deux autres, suivant que le point est extérieur ou intérieur à l'angle formé par les deux côtés ou par leurs prolongements.

Dès lors le problème de l'équilibre d'un corps solide était entièrement résolu; il ne restait plus qu'à présenter la solution sous la forme simple des six équations que nous avons rappelées plus haut. D'Alembert fit ce dernier pas dans ses *Recherches sur la précession des équinoxes*, chap. II; 1749.

SECTION I.

ÉQUILIBRE SANS FROTTEMENT.

1. OBA *est une barre pesante et homogène qui forme un levier de second genre. Le point d'appui est à l'extrémité* O, *la résistance est appliquée au point* B, *la puissance agit à l'autre extrémité* A. *Étant donnés le poids* Q *qui constitue la résistance, son bras de levier* OB $= b$, *et le poids* p *de la barre par l'unité de longueur, trouver la longueur* OA $= a$ *de la barre qui donne le plus d'avantage à la puissance* P.

Toutes les conditions d'équilibre se réduisent dans ce cas à l'équation des moments par rapport au point d'appui :

$$Qb = Pa - \frac{1}{2}pa^2.$$

Il en résulte

$$P = Q\frac{b}{a} + \frac{1}{2}pa.$$

Le minimum de P peut se déterminer, soit par les dérivées, soit par le procédé algébrique élémentaire. Il est atteint quand

$$a = \sqrt{\frac{2bQ}{p}}.$$

2. *Une tige pesante et homogène appuie son extrémité inférieure* A *sur un plan horizontal, et son extrémité supérieure* B *sur un plan vertical perpendiculaire au plan vertical qui passe par la tige. Le point* C, *où ce dernier plan rencontre l'intersection des deux premiers, est lié à un point connu de la tige,* E, *par un fil sans poids* CE, *qui maintient l'équilibre. Déterminer la tension du fil.*

Soient $2a$ la longueur de la tige, P son poids, R et R′ les réactions du plan vertical et du plan horizontal, α et ε les inclinaisons de la tige et du fil sur l'horizontale AC, T la tension du fil.

Observons que l'on peut toujours remplacer les poids de toutes les molécules d'un corps solide par une force unique, égale au poids total du corps, et appliquée au centre de gravité.

Pour former les équations d'équilibre, projetons toutes les forces qui sollicitent la tige d'abord sur l'horizontale CA, puis sur la verticale CB, et prenons leurs moments,

par rapport au point C. Il vient

$$R - T\cos\varepsilon = 0, \quad R' - P - T\sin\varepsilon = 0,$$
$$R.2a\sin\alpha + P.a\cos\alpha - R'.2a\cos\alpha = 0;$$

d'où l'on tire, après avoir éliminé R et R',

$$T = P\frac{\cos\alpha}{2\sin(\alpha - \varepsilon)}.$$

Cette formule résout le problème et nous montre que :
Si $\varepsilon = \alpha$, T est infini, l'équilibre est impossible;
Si $\varepsilon > \alpha$, T est négatif, l'équilibre est impossible;
Si $\varepsilon < \alpha$, T est positif, l'équilibre est possible.

3. *Une tige pesante et homogène* AA'A''B *repose par son extrémité inférieure* A *sur un plan horizontal, presse en* A' *une cheville fixe située au-dessus du corps, et s'appuie en* A'' *sur une autre cheville fixe située au-dessous. Déterminer, dans le cas d'équilibre, les pressions exercées sur la tige par le plan horizontal et les deux chevilles.*

Soient $2a$ la longueur de la tige, P son poids, α son inclinaison sur le plan horizontal, b la distance des deux chevilles, et R, R', R'' les pressions exercées par le plan, la cheville A' et la cheville A''.

Projetons les forces qui sollicitent la tige sur la direction AB et sur une direction perpendiculaire, puis prenons leurs moments par rapport au point A. Il vient

$$P\sin\alpha - R\sin\alpha = 0,$$
$$R' + P\cos\alpha - R'' - R\cos\alpha = 0,$$
$$R''.(\overline{AA'} + b) - R'.\overline{AA'} - P.a\cos\alpha = 0;$$

d'où l'on tire

$$R = P, \quad R' = R'' = \frac{a}{b}P\cos\alpha.$$

4. *Une tige pesante et homogène* AA'B *appuie son extrémité inférieure* A *contre une droite verticale, et repose en* A' *sur un point fixe situé au-dessous du corps. Déterminer les pressions que la tige supporte de la part de la droite et du point lorsque l'équilibre a lieu.*

Soient $2a$ la longueur de la tige, P son poids, α son inclinaison à l'horizon, c la distance du point fixe à la droite verticale, R et R' les pressions exercées par la droite et par le point.

Si nous projetons successivement les forces qui sollicitent la tige, sur la direction AA' et sur une direction perpendiculaire, puis que nous prenions leurs moments par rapport au point fixe A', nous obtenons

$$R\cos\alpha - P\sin\alpha = 0,$$
$$R' - R\sin\alpha - P\cos\alpha = 0,$$
$$R.\overline{AA'}\sin\alpha = P\left(a - \overline{AA'}\right)\cos\alpha.$$

La dernière équation peut s'écrire

$$Rc\sin\alpha = P(a\cos\alpha - c)\cos\alpha.$$

Cette formule, jointe à la première, donne

$$\cos\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$R = P\tang\alpha = P\left(\frac{a^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par la combinaison des deux premières équations, on obtient

$$R' = \frac{P}{\cos\alpha} = P\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

La valeur de $\cos\alpha$ montre que l'équilibre est impossible lorsque c est plus grand que a.

5. *Quelle est la force nécessaire pour retenir, dans une position donnée, une porte dont les gonds ne sont point situés sur une même ligne verticale?*

On connaît le poids P de la porte, la distance a du centre de gravité à la ligne des gonds, l'inclinaison β de cette ligne sur la verticale, et l'angle dièdre α compris entre le plan vertical mené par cette même ligne et le plan de la porte.

Nommons φ l'inclinaison de la porte sur le plan horizontal.

Le moment du poids de la porte par rapport à la ligne des gonds est $P \cos\varphi . a$; or, dans le trièdre rectangle formé par le plan de la porte, un plan horizontal et le plan vertical mené par la ligne des gonds, on a

$$\cos\varphi = \sin\alpha \sin\beta;$$

par conséquent, pour maintenir la porte en équilibre, il faut lui appliquer, à une distance b de la ligne des gonds, une force normale F, telle que

$$F b = P \sin\alpha \sin\beta . a.$$

6. *Une tige rigide* AB *peut tourner librement autour de son extrémité inférieure* A, *qui est engagée dans une charnière fixe, tandis que son extrémité supérieure* B *s'appuie contre une droite verticale. Déterminer la pression exercée par la droite, ainsi que les composantes horizontales et verticales de la pression exercée par la charnière.*

Soient P le poids de la tige, a sa longueur, b la distance de son extrémité inférieure au centre de gravité, α son inclinaison à l'horizon, R la pression exercée par la droite verticale, H la composante horizontale de la pression exercée par la charnière, et V la composante verticale.

Si nous projetons les forces sur l'horizontale, puis sur la verticale, il vient

$$H = R,$$
$$V = P;$$

et, si nous prenons les moments par rapport à la charnière A, nous obtenons

$$R.a \sin\alpha = P.b \cos\alpha;$$

d'où

$$R = \frac{Pb}{a \operatorname{tang}\alpha} = H, \quad V = P.$$

Ce problème fut proposé et mal résolu par Stone; Jean Bernoulli (*) ne le résolut pas mieux, et ce fut Couplet (**) qui donna la première solution correcte. On peut lire l'histoire de ce célèbre problème écrite par Franchini, dans les *Mémoires de la Société italienne*, t. XVI, 1re part., p. 228; 1813.

7. *On sait que des forces en nombre quelconque, appliquées à un corps solide, peuvent toujours se réduire à deux forces, et cela d'une infinité de manières. Prouver que, de quelque manière que l'on fasse cette réduction, le tétraèdre construit sur les deux forces résultantes, comme arêtes opposées, a toujours même volume.*

Soient A, B deux points pris à volonté dans l'espace, et PQ la droite qui représente en grandeur et en direction une force donnée. Il est aisé de voir que le moment de la force PQ par rapport à l'axe AB est égal, en valeur absolue, à six fois le quotient du tétraèdre ABPQ par la distance AB. Nous représenterons ce moment par

$$\frac{6\,\mathrm{ABPQ}}{\mathrm{AB}},$$

(*) *Opera*, t. IV, p. 189.
(**) *Mémoires de l'Académie de Paris*, p. 69; 1731.

et nous aurons soin de disposer les lettres du numérateur de manière qu'un observateur, dont les pieds sont en A et la tête en B, voie le point P à sa gauche et le point Q à sa droite, lorsque le moment est positif. Nous aurons, par exemple,

$$6\frac{ABPQ}{AB} = -6\frac{ABQP}{AB} = 6\frac{PQAB}{AB}.$$

Ceci posé, nommons PQ et RS un système de deux forces résultantes; P′Q′ et R′S′ un autre système de forces résultantes, et A, B deux points pris à volonté dans l'espace.

Les quatre forces PQ, RS, Q′P′, S′R′ se font équilibre; la somme de leurs moments par rapport à l'axe AB est nulle; par conséquent, on a

$$ABPQ + ABRS = ABP'Q' + ABR'S'.$$

Nous pouvons faire coïncider les points A et B successivement avec les points P et Q, R et S, P′ et Q′, R′ et S′; il vient alors

$$\begin{aligned} PQRS &= PQP'Q' + PQR'S', \\ RSPQ &= RSP'Q' + RSR'S', \\ P'Q'PQ + P'Q'RS &= P'Q'R'S', \\ R'S'PQ + R'S'RS &= R'S'P'Q'. \end{aligned}$$

Ajoutant ces équations, on obtient

$$PQRS = P'Q'R'S',$$

et cette égalité démontre la proposition.

Ce théorème fut énoncé d'abord par M. Chasles (*Annales de Gergonne*, t. XVIII; 1828) : la démonstration qui précède est de Möbius (*Journal de M. Crelle*, t. IV, p. 179). M. Chasles a démontré plus tard ce théorème, ainsi que plusieurs autres du même genre, dans le *Journal de M. Liouville*, t. XII; 1847.

8. Quand plusieurs forces sollicitent un corps solide libre, on sait qu'on peut les remplacer d'une infinité de manières par un système équivalent de deux ou d'un plus grand nombre de forces. Ces divers systèmes équivalents jouissent de la propriété suivante : la droite, qui joint le centre des moyennes distances des points d'application des forces de chaque système au centre des moyennes distances des extrémités des lignes qui représentent ces forces, est toujours parallèle à un axe fixe, et la longueur de cette droite est en raison inverse du nombre des forces. Ainsi, de quelque manière qu'on réduise à deux forces un nombre quelconque de forces appliquées à divers points liés invariablement, la droite, qui joindra le milieu de la distance des points d'application de ces deux forces avec le milieu de la distance de leurs extrémités, sera toujours égale et parallèle à une droite fixe.

En effet, soient x, y, z les coordonnées des points d'application de l'une quelconque des forces ;

x', y', z' les coordonnées de l'extrémité de la droite qui représente cette force ;

n le nombre des forces ;

X, Y, Z et X', Y', Z' les coordonnées du centre des moyennes distances des points (x, y, z) et (x', y', z') ;

$x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1$, X_1, Y_1, Z_1, X'_1, Y'_1, Z'_1 les quantités analogues pour un système de forces équivalent.

On a

$$\Sigma(x - x') = \Sigma(x_1 - x'_1),$$

$$\Sigma(y - y') = \Sigma(y_1 - y'_1),$$

$$\Sigma(z - z') = \Sigma(z_1 - z'_1),$$

$$\frac{X}{\Sigma x} = \frac{Y}{\Sigma y} = \frac{Z}{\Sigma z} = \frac{X'}{\Sigma x'} = \frac{Y'}{\Sigma y'} = \frac{Z'}{\Sigma z'} = \frac{1}{n},$$

$$\frac{X_1}{\Sigma x_1} = \frac{Y_1}{\Sigma y_1} = \frac{Z_1}{\Sigma z_1} = \frac{X'_1}{\Sigma x'_1} = \frac{Y'_1}{\Sigma y'_1} = \frac{Z'_1}{\Sigma z'_1} = \frac{1}{n_1};$$

d'où l'on tire

$$\frac{Y-Y'}{X-X'}=\frac{Y_1-Y'_1}{X_1-X'_1},\quad \frac{Z-Z'}{X-X'}=\frac{Z_1-Z'_1}{X_1-X'_1},$$

$$\frac{(X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2}{(X_1-X'_1)^2+(Y_1-Y'_1)^2+(Z_1-Z'_1)^2}=\frac{n_1^2}{n^2}.$$

Ces trois dernières relations démontrent le théorème.

CHASLES, *Bulletin des Sciences, etc., de l'Académie de Bruxelles;* 1840, IIe part., p. 261. *Correspondance mathématique;* 1829, p. 106-108.

9. Soient PQ et RS les droites qui représentent en grandeur et en direction deux forces données. Nous dirons que le tétraèdre qui a ces deux droites pour arêtes opposées est construit sur les deux forces, et nous conviendrons, dans le théorème qui suit, de prendre ce tétraèdre positivement lorsqu'un observateur, dont les pieds sont en P et la tête en Q, voit le point R à sa gauche et le point S à sa droite.

Lorsque n forces appliquées à un corps solide se font équilibre, ou peuvent se réduire à une force unique, la somme algébrique des $\frac{n(n-1)}{2}$ *tétraèdres, que l'on peut construire sur ces forces prises deux à deux, est nulle; dans les autres cas, où les forces ne peuvent se réduire qu'à deux résultantes, la somme dont il s'agit est égale au tétraèdre construit sur les deux résultantes.*

Démontrer ce théorème.

MOBIUS, *Journal de M. Crelle*, t. IV, p. 184.

10. *Des forces appliquées à tous les éléments d'une surface fermée quelconque, dirigées suivant la normale et proportionnelles aux surfaces de ces éléments, se font équilibre, pourvu que toutes ces forces agissent à la fois de l'intérieur de la surface à l'extérieur, ou inversement.*

La démonstration de cette proposition résulte immédiatement d'un théorème que l'on trouvera plus loin, t. II, *Complément aux questions de Statique, Attraction*, sect. I, théor. I.

11. *Quand on applique à tous les éléments d'une surface fermée quelconque des forces normales proportionnelles au produit* $d\sigma\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)$, $d\sigma$ *désignant la surface de l'élément auquel la force est appliquée,* R *et* r *les rayons de courbure principaux de la surface, toutes ces forces se font équilibre, pourvu qu'elles soient toutes dirigées de l'intérieur à l'extérieur, ou inversement.*

Prolongeons vers l'extérieur chacune des normales à la surface d'une même quantité très-petite ds; le lieu de ces extrémités sera une deuxième surface qui aura les mêmes normales que la première. Soient $d\sigma'$ l'aire de l'élément de cette seconde surface, et P un facteur constant.

Un système des forces normales $Pd\sigma$ appliquées de l'intérieur à l'extérieur sur la première surface est en équilibre, d'après le théorème précédent; il en est de même pour un système de forces normales $Pd\sigma'$ appliqué en sens contraire à la deuxième surface, et aussi pour le système résultant $P(d\sigma'-d\sigma)$ que nous supposerons appliqué à l'élément $d\sigma$.

Je vais montrer que la différence $d\sigma'-d\sigma$ peut se mettre sous la forme $d\sigma ds\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)$; alors le théorème sera prouvé.

Prenons pour $d\sigma$ un élément rectangulaire ABCD limité par quatre lignes de courbure, et pour $d\sigma'$ l'élément A'B'C'D' limité par les prolongements des normales qui entourent $d\sigma$; l'élément $d\sigma'$ sera pareillement un rectangle compris entre quatre lignes de courbure de la seconde surface.

Posons

$$AB = \alpha, \quad AC = \beta,$$
$$A'B' = \alpha + d\alpha, \quad A'C' = \beta + d\beta.$$

Nous aurons à la limite, pour des éléments infiniment petits,

$$d\sigma' - d\sigma = \beta d\alpha + \alpha d\beta.$$

Or les normales A'A et B'B se rencontrent en un point O situé à une distance R du point A et à une distance $R + ds$ du point A', et les triangles semblables OAB, OA'B' nous donnent

$$\frac{\alpha}{\alpha + d\alpha} = \frac{R}{R + ds},$$

d'où

$$d\alpha = \frac{\alpha ds}{R};$$

de même,

$$d\beta = \frac{\beta ds}{r},$$

et, par suite,

$$d\sigma' - d\sigma = d\sigma ds \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right).$$

J. Bertrand, *Mémoire sur les surfaces isothermes.*

On peut démontrer de la même manière que *des forces appliquées à tous les éléments d'une courbe plane fermée, dirigées suivant la normale et proportionnelles à* $\frac{ds}{\rho}$, *ds désignant l'élément de l'arc, et* ρ *le rayon de courbure, se font équilibre.*

12. *Si l'on applique à tous les éléments d'une surface fermée quelconque des forces normales, proportionnelles à* $\frac{d\sigma}{Rr}$, *toutes ces forces se font équilibre, pourvu qu'elles*

agissent toutes de l'intérieur à l'extérieur, ou inversement.

La notation est la même que dans le théorème précédent.

Nous considérons les deux mêmes surfaces.

D'après ce théorème, le système des forces normales

$$P d\sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right),$$

appliquées de l'intérieur à l'extérieur sur les éléments $d\sigma$, se font équilibre.

Il en est de même des forces

$$P d\sigma' \left(\frac{1}{R + ds} + \frac{1}{r + ds}\right)$$

appliquées en sens contraire aux éléments $d\sigma'$; et si nous composons ensemble ces deux systèmes, le système des forces résultantes

$$P d\sigma' \left(\frac{1}{R + ds} + \frac{1}{r + ds}\right) - P d\sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right),$$

que nous supposerons appliquées aux éléments $d\sigma$, sera pareillement en équilibre.

Remplaçons dans l'expression de ces dernières forces $d\sigma'$ par sa valeur

$$d\sigma + d\sigma\, ds \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right).$$

Il vient à la limite, par l'évanouissement des infiniment petits de troisième ordre,

$$2 P d\sigma\, ds \frac{1}{Rr},$$

quantité proportionnelle à $\frac{d\sigma}{Rr}$.

Dès lors le théorème est démontré.

JOUBERT, *Journal de M. Liouville*, t. XIII, p. 241; 1848.

Il est à remarquer que les forces normales proportionnelles à l'élément de surface et à $\frac{1}{Rr}$, qui se font équilibre sur une surface, se font encore équilibre sur toute surface fermée obtenue en déformant la première, pourvu qu'elles soient toujours normales aux éléments; car c'est un théorème démontré par Gauss (*Mémoire sur les surfaces*), que le rapport $\frac{1}{Rr}$ n'est point altéré par la déformation de la surface.

13. *Une échelle, inclinée de* 30 *degrés à l'horizon, appuie son extrémité inférieure sur un plan horizontal, et son extrémité supérieure sur un plan incliné de* 60 *degrés à l'horizon. Ces deux plans sont parfaitement polis, et l'échelle peut être assimilée à une barre homogène. Quelle force horizontale faut-il appliquer au pied de l'échelle pour l'empêcher de glisser?*

Soit P le poids de l'échelle.

La force cherchée est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}$ P.

14. *Une sphère homogène repose sur deux plans inclinés. Déterminer la pression exercée sur chacun de ces plans.*

Soient P le poids de la sphère, α, α' les inclinaisons des deux plans sur l'horizon, R, R' les pressions exercées sur ces mêmes plans.

On trouve

$$R = \frac{\sin\alpha'}{\sin(\alpha+\alpha')}P, \quad R' = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')}P.$$

LEIBNITZ, *Opera*, t. III, p. 176.

15. *Une barre homogène s'appuie par ses extrémités sur deux plans inclinés. Déterminer la position d'équilibre et les pressions exercées sur les plans.*

Soient P le poids de la barre, θ l'angle qu'elle forme avec l'horizon, α et α' les inclinaisons des deux plans sur l'horizon, R et R' les pressions exercées sur ces plans; et supposons que l'extrémité inférieure de la barre s'appuie sur le plan auquel se rapportent les quantités α et R.

La barre est perpendiculaire à l'intersection des deux plans, et l'on a

$$R = \frac{\sin\alpha'}{\sin(\alpha+\alpha')}P, \quad R' = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')}P,$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{2\sin\alpha\sin\alpha'}.$$

16. *Une tige pesante et homogène* AEB *appuie son extrémité inférieure* A *contre un plan vertical, repose en* E *sur un point fixe, et porte un poids* Q *à son extrémité supérieure. Déterminer la position d'équilibre.*

Soient P le poids de la tige, a sa longueur, b la distance du point fixe au plan vertical, et x la longueur AE de la partie de la tige qui est située entre le point fixe et le plan vertical.

La tige est dans un plan perpendiculaire au plan vertical dont il s'agit, et l'on a

$$x = \left(ab^2\frac{Q+\frac{1}{2}P}{Q+P}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

FONTANA, *Memorie della Società italiana;* 1802, p. 630.

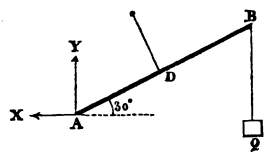
Si l'on suppose $P = 0$, alors $x = (ab^2)^{\frac{1}{3}}$, quelle que soit la grandeur du poids Q.

Euler (*) a discuté ce problème comme application du principe de Maupertuis, nommé *loi du repos*.

(*) *Académie des Sciences de Berlin*, t. VII, p. 196; 1751.

17. *Un poids* Q *est suspendu à l'extrémité* B *d'une tige* ADB, *dont l'autre extrémité* A *est engagée dans une charnière fixe. Cette tige est sans poids; elle est soutenue par un fil perpendiculaire, attaché en son point milieu* D, *Déterminer la grandeur et la direction de la pression supportée par la charnière, lorsque la tige fait un angle de* 30 *degrés avec l'horizon.*

Fig. 9.



Soient $2a$ la longueur de la tige, X la composante horizontale de la pression supportée par la charnière, Y la composante verticale, R la pression résultante et φ l'angle que cette pression fait avec l'horizon.

On trouve

$$X = \frac{\sqrt{3}}{2}Q, \quad Y = \frac{1}{2}Q,$$

$$R = Q, \quad \varphi = \frac{2}{3}\pi.$$

18. *Une barre pesante* AB *peut tourner librement autour de son extrémité* A, *qui est fixe, tandis que l'autre extrémité* B *est soutenue par un cordon qui s'engage sur une poulie fixe, et porte un poids* Q. *Déterminer la position d'équilibre.*

On connaît le poids P de la barre, les distances a et b de son centre de gravité aux extrémités A et B, les distances l et k de la poulie à l'horizontale et à la verticale menées par l'extrémité fixe A.

Les angles θ et φ, que la barre et le cordon forment sur l'horizon, nous sont donnés par les équations

$$Q(a+b)\sin(\varphi-\theta) = Pa\cos\theta,$$
$$(a+b)\sin(\varphi-\theta) = k\sin\varphi - l\cos\varphi,$$

dont la résolution est facile.

19. *Une barre pesante et homogène appuie l'une de ses extrémités sur un plan incliné, tandis que l'autre extrémité est soutenue par un fil attaché en un point fixe, lequel est situé au-dessus du plan incliné. Déterminer la position d'équilibre, la tension du fil et la pression sur le plan.*

Soient α l'inclinaison du plan sur l'horizon, $2a$ la longueur de la barre, P son poids, θ son inclinaison sur le plan, R la pression qu'elle exerce sur le plan, T la tension du fil, c sa longueur, φ son inclinaison sur le plan, b la distance du plan au point fixe où le fil est attaché.

Les angles θ et φ sont déterminés par les deux équations

$$2\sin(\varphi-\theta)\sin\alpha=\cos\varphi\cos(\theta+\alpha),$$
$$c\sin\varphi+2a\sin\theta=b;$$

et l'on a

$$R=P\frac{\cos(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi},\quad T=P\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi}.$$

20. *Une barre pesante et homogène appuie l'une de ses extrémités contre un plan vertical, tandis que l'autre extrémité est soutenue par un fil attaché en un point fixe du même plan vertical. Déterminer la position d'équilibre, la pression contre le plan et la tension du fil.*

Conservons la notation du problème précédent, en supposant que l'angle α soit égal à 90 degrés.

Il vient

$$\sin\varphi=-\left(\frac{16a^2-c^2}{3c^2}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \sin\theta=\left(\frac{16a^2-c^2}{12a^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$T=\left(\frac{3c^2}{4c^2-16a^2}\right)^{\frac{1}{2}}P,\quad R=\left(\frac{16a^2-c^2}{4c^2-16a^2}\right)^{\frac{1}{2}}P.$$

21. *Dans l'intérieur d'une sphère creuse on place une lame pesante et homogène, dont la forme est celle d'un triangle isocèle; les trois sommets s'appuient contre la surface de la sphère. Déterminer la position d'équilibre.*

Soient r le rayon de la sphère, a la longueur des côtés égaux dans le triangle, h la hauteur du triangle et θ l'angle que son plan forme avec l'horizon.

On trouve

$$\tang\theta = \frac{4h^2 - 3a^2}{3\sqrt{4r^2h^2 - a^4}}.$$

22. *Une tige pesante et homogène s'appuie sur le bord d'un hémisphère concave, et son extrémité inférieure repose sur la surface interne. On suppose que le bord de l'hémisphère est horizontal, et que la longueur de la tige est supérieure au diamètre. Déterminer la position d'équilibre.*

Soient r le rayon de l'hémisphère, $2a$ la longueur de la tige et θ l'angle qu'elle forme avec l'horizon.

L'angle θ est déterminé par l'équation du second degré

$$4r\cos^2\theta - a\cos\theta - 2r = 0.$$

23. *Un poids* Q *est suspendu sur le bord d'une demi-sphère homogène, qui repose par sa surface convexe sur un plan horizontal. Déterminer la position d'équilibre.*

Soient P le poids de la demi-sphère, c la distance de son centre de gravité au centre de la sphère, et θ l'angle de son axe avec la verticale.

On trouve

$$\tang\theta = \frac{Qr}{Pc}.$$

24. *Une lame homogène, qui a la forme d'un triangle rectangle isocèle, est située dans un plan vertical, et*

s'appuie par ses côtés égaux sur deux chevilles fixes. Déterminer la position d'équilibre.

Soient h la hauteur du triangle, θ l'inclinaison de sa base sur l'horizon et a la distance des deux chevilles.

On obtient les deux solutions

$$\theta = 0, \quad \theta = \text{arc cos}\,\frac{h}{3a}.$$

25. *Une lame circulaire et homogène repose par son centre sur une tige verticale. Placer sur la circonférence trois poids p_1, p_2, p_3, de manière que la lame reste horizontale.*

Soient (p_1, p_2), (p_2, p_3), (p_3, p_1) les angles au centre sous-tendus par les arcs qui séparent les poids p_1 et p_2, p_2 et p_3, p_3 et p_1.

On trouve

$$\cos(p_1, p_2) = -\frac{p_1^2 + p_2^2 - p_3^2}{2p_1p_2},$$

$$\cos(p_2, p_3) = -\frac{p_2^2 + p_3^2 - p_1^2}{2p_2p_3},$$

$$\cos(p_3, p_1) = -\frac{p_3^2 + p_1^2 - p_2^2}{2p_3p_1}.$$

26. *Une plaque triangulaire, homogène et partout d'égale épaisseur, est suspendue à un point fixe par trois fils attachés aux sommets du triangle. Démontrer que, si la plaque est horizontale, on a, entre les longueurs des fils α, β, γ et les côtés a, b, c respectivement opposés aux points d'attache, les relations*

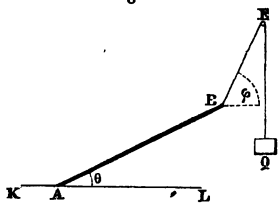
$$a^2 + 3\alpha^2 = b^2 + 3\beta^2 = c^2 + 3\gamma^2.$$

SECTION II.

ÉQUILIBRE AVEC FROTTEMENT.

1. *Une barre pesante et homogène* AB *repose par l'une de ses extrémités* A *sur un plan horizontal et dépoli* KL; *l'autre extrémité* B *est soutenue par un fil qui passe sans frottement sur une poulie* E *et supporte un poids* Q. *Déterminer la suite des positions d'équilibre.*

Fig. 10.



Soient $2a$ la longueur de la barre, P son poids, θ son inclinaison à l'horizon, R la pression normale que le plan exerce sur l'extrémité A, F le frottement exercé sur la même extrémité dans la direction LK, μ le coefficient de frottement relatif au plan et à la barre, et φ l'inclinaison du fil BE sur l'horizon.

Projetons les forces qui sollicitent la barre d'abord sur une horizontale, puis sur une verticale, et prenons leurs moments par rapport à l'extrémité A. Il vient

$$F = Q\cos\varphi,$$

$$R + Q\sin\varphi = P,$$

$$\text{(A)} \qquad P\cos\theta = 2Q\sin(\varphi - \theta).$$

Posons

$$F = R\,\text{tang}\,\varepsilon,$$

tang ε sera une quantité comprise entre o et μ; alors la première équation pourra s'écrire

$$R\,\text{tang}\,\varepsilon = Q\cos\varphi,$$

et, si l'on élimine R à l'aide de la seconde équation, on trouve

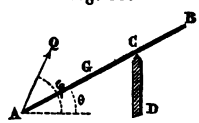
$$\text{(B)} \qquad P\sin\varepsilon = Q\cos(\varphi - \varepsilon).$$

Cette relation, jointe à la formule (A), nous détermine les angles φ et θ qui correspondent à une valeur donnée de ε. On aura toutes les positions d'équilibre en donnant à ε toutes les valeurs comprises entre o et arc tang μ.

Pour la valeur particulière $\varepsilon = 0$, l'équation (B) donne $\varphi = \frac{\pi}{2}$; et, d'après l'équation (A), on a $\theta = \frac{\pi}{2}$, quel que soit le poids Q, pourvu qu'il soit inférieur à celui de la barre. Dans le cas où l'on aurait $Q = \frac{1}{2}P$, l'angle θ pourrait être quelconque.

2. *Une barre pesante* ACB, *appuyée sur un étai* DC, *est soutenue par une force* Q *qui agit à l'extrémité* A *dans une direction donnée. Déterminer la position de la barre, lorsqu'elle est sur le point de glisser dans le sens* AB *malgré la force de frottement qui s'exerce au point d'appui.*

Fig. 11.



Soient P le poids de la barre, G son centre de gravité, a la distance AG, x la distance GC, θ l'inclinaison de la barre sur l'horizon, φ l'inclinaison de la force, R la pression normale de l'étai sur la barre, et μ le coefficient de frottement.

Projetons les forces qui sollicitent la barre sur l'horizontale, sur la verticale, puis prenons leurs moments relatifs au point C, en supposant que la barre soit sur le point de glisser. Il vient

$$Q\cos\varphi = R\sin\theta + \mu R\cos\theta,$$

$$Q\sin\varphi + R\cos\theta = P + \mu R\sin\theta,$$

$$\text{(A)} \qquad Px\cos\theta = Q(a + x)\sin(\varphi - \theta).$$

Éliminons R entre les deux premières équations, et pour

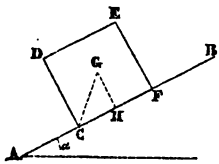
résoudre plus commodément l'équation finale par rapport à θ, posons $\mu = \text{tang}\,\varepsilon$; nous trouvons

$$\text{tang}\,\theta = \frac{Q\cos(\varepsilon - \varphi) - P\sin\varepsilon}{Q\sin(\varepsilon - \varphi) + P\cos\varepsilon}.$$

L'équation (A) nous fera connaître la distance x.

3. *Une planche rectangulaire et homogène* CDEF, *située dans un plan vertical, repose par l'un de ses côtés* CF *sur un plan dépoli* AB, *dont l'inclinaison à l'horizon croît graduellement. Dans quelle position du plan la planche commencera-t-elle à glisser, ou à tomber en tournant autour de son sommet* C?

Fig. 12.



Soient P le poids de la planche, a le côté CF, b le côté CD, R la pression normale que la planche éprouve de la part du plan, α l'inclinaison du plan et μ le coefficient de frottement.

Lorsque le corps est sur le point de glisser, on a

$$\mu R = P\sin\alpha,$$
$$R = P\cos\alpha;$$

par conséquent,

$$\mu = \text{tang}\,\alpha, \quad \alpha = \text{arc tang}\,\mu.$$

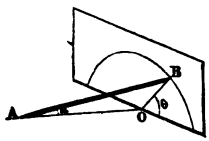
Telle est l'inclinaison du plan lorsque le corps commence à glisser.

Observons cependant que le corps pourra perdre son équilibre sans glisser. En effet, soient G le centre de gravité du corps et GH une perpendiculaire abaissée sur le côté CF. Si le coefficient μ est assez considérable pour que la droite CG devienne verticale avant que l'angle α ait atteint la valeur arc tangμ, à cet instant le corps tournera

autour du sommet C, et perdra son équilibre avant de glisser. Lorsque la ligne CG est verticale, α est égal à l'angle CGH, d'ailleurs $\operatorname{tang} CGH = \frac{a}{b}$; par conséquent, le corps commencera par tourner si l'on a $\mu > \frac{a}{b}$, et il commencera par glisser si l'on a $\mu < \frac{a}{b}$.

4. *Une tige pesante* AB *peut se mouvoir en tous sens et sans frottement autour de son extrémité* A *comme pivot; son autre extrémité* B *s'appuie sur un plan vertical et dépoli. Déterminer la position de la tige lorsqu'elle est sur le point de perdre son équilibre.*

Fig. 13.



Soient P le poids de la barre, α son inclinaison sur la perpendiculaire au plan, R la pression normale que la barre éprouve de la part du plan, et μ le coefficient de frottement.

Le lieu du point B sur le plan vertical est un cercle qui a pour centre la projection O de l'extrémité fixe A. Nommons θ l'inclinaison du rayon OB sur l'horizon, et observons que le frottement s'exerce suivant la tangente au cercle.

Si nous considérons les moments des forces par rapport à un axe vertical passant par l'extrémité fixe A, nous obtenons la relation

$$R.OB\cos\theta = \mu R\sin\theta.OA.$$

Or

$$OB = OA\operatorname{tang}\alpha;$$

donc

$$\operatorname{tang}\alpha\cos\theta = \mu\sin\theta, \quad \operatorname{tang}\theta = \frac{1}{\mu}\operatorname{tang}\alpha.$$

5. *Une tige pesante appuie ses extrémités l'une sur un plan horizontal, l'autre sur un plan vertical, et est*

perpendiculaire à l'intersection des deux plans. Déterminer la position de la tige, lorsqu'elle est sur le point de perdre son équilibre.

Soient μ et μ' les coefficients de frottement relatifs au plan horizontal et au plan vertical, a et b les distances du centre de gravité de la tige à l'extrémité inférieure et à l'extrémité supérieure, θ l'inclinaison de la tige sur l'horizon.

On trouve

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{a - \mu\mu' b}{\mu(a + b)}.$$

6. *Une barre pesante et homogène appuie ses extrémités sur les deux faces d'un angle dièdre dont l'arête est horizontale. Déterminer la plus grande inclinaison à l'horizon que la barre puisse admettre sans glisser, et trouver les relations qui existent entre le poids de la barre et les pressions normales qu'elle éprouve, lorsqu'elle est sur le point de glisser.*

Soient α et α' les angles que les faces du dièdre font avec l'horizon de part et d'autre de l'arête commune, $\operatorname{tang}\lambda$ et $\operatorname{tang}\lambda'$ les coefficients de frottement relatifs à ces deux faces, R et R' les pressions normales que la barre éprouve de la part des mêmes plans, P le poids de la barre et θ sa plus grande inclinaison.

La barre doit être perpendiculaire à l'arête du dièdre, et l'on trouve

$$\frac{R}{\cos\lambda \sin(\alpha' - \lambda')} = \frac{R'}{\cos\lambda' \sin(\alpha - \lambda)} = \frac{P}{\sin(\alpha + \alpha' - \lambda - \lambda')},$$

$$2\operatorname{tang}\theta = \cot(\alpha - \lambda) - \cot(\alpha' - \lambda').$$

7. *Une tige homogène repose par son milieu sur un cylindre horizontal dont les génératrices lui sont perpendiculaires. Quel est le plus grand poids que l'on*

puisse suspendre à l'extrémité de la tige sans la faire glisser sur le cylindre?

Soient P le poids de la tige, $2a$ sa longueur, r le rayon du cylindre, tangλ le coefficient de frottement, et Q le poids cherché.

On trouve

$$\frac{Q}{P} = \frac{r\lambda}{a - r\lambda}.$$

8. *Une barre pesante et homogène appuie l'une de ses extrémités contre un plan vertical, tandis que l'autre extrémité est soutenue par un fil attaché en un point du plan. Déterminer la position de la barre lorsqu'elle est sur le point de glisser.*

Soient a la longueur de la barre, P son poids, R la pression normale qu'elle éprouve de la part du plan, θ l'angle qu'elle forme avec la verticale, l la longueur du fil, φ son inclinaison sur la verticale, et μ le coefficient de frottement.

Les angles φ et θ sont déterminés par les équations

$$(4a^2 - 4l^2 - \mu^2 l^2)\tang^2\varphi \mp 2\mu l^2 \tang\varphi + 4a^2 - l^2 = 0,$$

$$\sin\theta = \frac{l}{a}\sin\varphi.$$

Le signe supérieur correspond au glissement de bas en haut; le signe inférieur, au glissement de haut en bas.

9. *Un cylindre elliptique, dont l'axe est horizontal, appuie sa surface convexe sur deux plans, l'un vertical et poli, l'autre horizontal et dépoli Le corps est sur le point de glisser, lorsque le grand axe de l'ellipse de base fait un angle de 45 degrés avec l'horizon. Quel est le coefficient de frottement sur le plan horizontal?*

Soit e l'excentricité de l'ellipse de base.

Le coefficient de frottement est égal à $\frac{1}{2}e^2$.

10. *Une demi-sphère homogène peut rouler sur un plan horizontal; mais le frottement l'empêche de glisser. Quel est le moment du couple nécessaire pour tenir le corps en équilibre, lorsque la base est inclinée de* 30 *degrés à l'horizon.*

Soient P le poids de la demi-sphère, et r le rayon.

Le moment cherché est égal à $\frac{3}{16}Pr$.

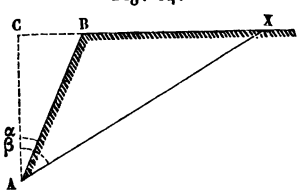
SECTION III.

POUSSÉE DES TERRES.

Imaginons un plan mené dans l'intérieur d'un massif de terre en équilibre. Les forces qui agissent sur l'une des faces de cette section et maintiennent l'équilibre sont la pression normale, la force tangentielle nommée *frottement statique*, et une seconde force tangentielle nommée *cohésion,* qui, d'après Coulomb, est proportionnelle à la surface de contact et indépendante de la pression, lorsque l'équilibre est sur le point d'être rompu (*).

1. *Un massif, dont la surface supérieure est un plan horizontal* BX, *se termine latéralement par un talus* BA, *de hauteur donnée. On demande de déterminer le plus petit angle que le talus puisse faire avec la verticale sans qu'il y ait éboulement.*

Fig. 14.



(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris;* 1773.

Soient :

AC $= h$ la hauteur du massif ;

α l'angle BAC que le talus fait avec la verticale ;

p le poids d'un volume de terre égal à l'unité ;

μ le coefficient de frottement statique ;

ν la force de cohésion pour l'unité de surface, lorsque le glissement est sur le point de naître.

On admet dans cette théorie que la rupture tend à se faire suivant un plan. Nous allons d'abord déterminer le plan sur lequel la rupture est le plus à craindre, en supposant l'angle α assez grand pour qu'il y ait équilibre, mais d'ailleurs quelconque ; puis nous déterminerons l'angle α par la condition que la rupture soit sur le point de s'opérer dans le plan trouvé.

En vertu de la symétrie, le plan de rupture doit être perpendiculaire au plan de la figure. Admettons d'abord qu'il coupe le talus à la base.

Soient AX ce plan, β l'angle qu'il fait avec la verticale, et P le poids du prisme ABX. Nous supposerons que l'épaisseur de ce prisme dans le sens perpendiculaire au plan de la figure soit égale à l'unité ; le calcul n'en sera pas moins général.

Les forces qui agissent sur le prisme ABX dans la direction XA, lorsque le glissement est sur le point de naître, ont une somme représentée par la formule

$$P\cos\beta - \mu P\sin\beta - \nu\overline{AX},$$

ou bien, en remplaçant P et AX par leurs valeurs,

$$\frac{1}{2}ph^2(\operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang}\alpha)(\cos\beta - \mu\sin\beta) - \frac{\nu h}{\cos\beta}.$$

La condition d'équilibre est que cette somme soit nulle ou négative. Plus cette somme s'approche de o, plus on doit craindre une rupture sur le plan AX.

Or, quand h augmente, la partie positive de cette somme augmente plus rapidement que la partie négative, car la première partie contient h^2 en facteur, tandis que la seconde contient seulement h à l'un de ses termes; donc, toutes choses égales, la rupture sur le plan AX est d'autant plus à craindre que la hauteur verticale du prisme qu'il sépare est plus grande. Ainsi, c'est avec raison que nous avons placé l'intersection du plan et du talus aussi bas que possible.

Pour déterminer l'angle β, posons

$$\operatorname{tang}\beta = x, \quad \frac{2\nu}{ph} = a,$$

et

$$(x - \operatorname{tang}\alpha)(1 - \mu x) - a(1 + x^2) = f(x).$$

La condition d'équibre sera

$$\frac{f(x)}{\sqrt{1 + x^2}} \leqq 0,$$

et l'angle cherché β sera celui pour lequel le premier membre de cette inégalité devient un maximum. Sa tangente, x, vérifiera l'équation dérivée

$$(1 + x^2)f'(x) - xf(x) = 0.$$

Ceci posé, on pourra tirer la valeur de x de cette dernière équation, la reporter dans la relation précédente où le second membre sera pris égal à 0; alors on aura une équation propre à déterminer l'angle α qui fait l'objet du problème. Mais on arrivera plus simplement au même résultat en éliminant x entre les équations

$$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f'(x) = 0.$$

On trouve ainsi une équation qui, résolue par rapport à $\operatorname{tang}\alpha$, donne la valeur

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\mu} + \frac{2}{\mu^2}\left[a - \sqrt{a(a + \mu)(1 + \mu^2)}\right],$$

ou

$$(1)\quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\mu} + \frac{2}{\mu^2}\left[\frac{2\nu}{ph} - \sqrt{\frac{2\nu}{ph}\left(\frac{2\nu}{ph} + \mu\right)(1+\mu^2)}\right].$$

Cet angle α dépend de la hauteur h.

A mesure que la hauteur augmente, $\operatorname{tang}\alpha$ s'approche de la limite $\frac{1}{\mu}$, qui conviendrait à toute hauteur, si la cohésion était nulle, comme cela a lieu sensiblement dans les terres fraîchement remuées.

La plus grande hauteur h' sur laquelle le massif puisse se soutenir à pic est celle qui rend nulle la valeur (1) de $\operatorname{tang}\alpha$. On trouve

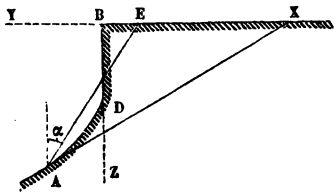
$$(2)\qquad h' = \frac{4\nu}{p}(\mu + \sqrt{1+\mu^2}).$$

Les formules (1) et (2) peuvent servir à déterminer les coefficients μ et ν pour un terrain donné. Deux expériences faites, l'une dans le cas de la formule (1), l'autre dans le cas de la formule (2), suffisent théoriquement à cette détermination.

NAVIER, *Leçons de Mécanique à l'École des Ponts et Chaussées;* 2e édit., sect. II, art. I.

2. *Un massif terminé par un plan horizontal* BX *peut se soutenir à pic sur une hauteur* BD $= h'$. *On demande de déterminer le profil courbe* DA *que le terrain doit avoir au-dessous du point* D, *pour être à la limite de stabilité en tout point de ce profil.*

Fig. 15.



Soient pris BD pour axe des z, le prolongement de XB pour axe des y. Nommons z, y les coordonnées d'un

point quelconque A de la courbe cherchée; par ce point menons une droite AE tellement inclinée, que le triangle AEX soit équivalent à la figure ADBX. Soient η la distance du point E à la verticale du point A, et α l'angle de AE sur la verticale. Conservons pour le reste la notation du problème précédent.

Le terrain terminé au talus fictif AE doit être à la limite de stabilité. Si donc on observe que $\eta = z \operatorname{tang} \alpha$ et que z est la hauteur du talus, on aura, d'après le problème précédent,

$$\eta = \frac{z}{\mu} + \frac{2}{\mu^2}\left[\frac{2\nu}{p} - \sqrt{\frac{2\nu}{p}\left(\frac{2\nu}{p} + \mu z\right)(1+\mu^2)}\right].$$

D'ailleurs l'égalité des surfaces AEX, ADBX donne

$$\frac{\eta z}{2} = \int_0^y z dy.$$

Différentiant ces deux équations et éléminant η, $d\eta$, on trouve l'équation différentielle de la courbe cherchée,

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{\mu} + \frac{2\nu}{\mu^2 pz} - \sqrt{1+\mu^2}\left\{\frac{1}{2\mu\sqrt{1+\frac{\mu pz}{2\nu}}} + \frac{\sqrt{1+\frac{\mu pz}{2\nu}}}{\frac{\mu^2 pz}{2\nu}}\right\}.$$

L'intégrale s'obtient immédiatement,

$$y = \frac{z}{\mu} - \frac{6\nu\sqrt{1+\mu^2}}{\mu^2 p}\sqrt{1+\frac{\mu pz}{2\nu}}$$
$$+ \frac{2\nu\sqrt{1+\mu^2}}{\mu^2 p}\log\frac{\sqrt{1+\frac{\mu pz}{2\nu}}+1}{\sqrt{1+\frac{\mu pz}{2\nu}}+1}\, z^{(1+\mu^2)^{-\frac{1}{2}}} + \text{const.},$$

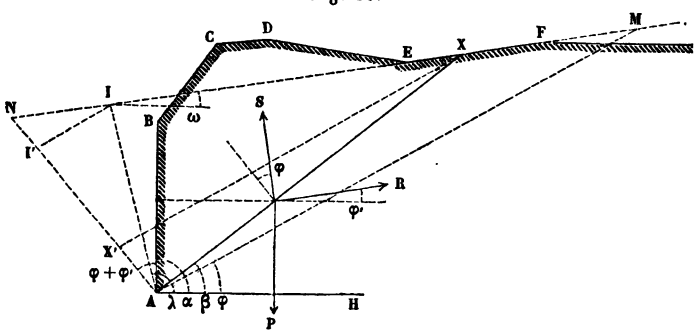
la constante étant telle, que y s'annule pour $z = h'$.

Si, dans l'expression de $\frac{dy}{dz}$, on remplace z par la valeur de h' qui a été donnée au problème précédent, on trouve que la courbe AD coupe la verticale BD au point D sous un angle dont la tangente est

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\mu^2}-\mu\right).$$

3. *Soit un massif* ABCDEF..., *soutenu par un mur* AB, *et dont le profil est un polygone quelconque, mais constant sur toute la longueur. On suppose, dans ce massif, un prisme* ABCDEX *prêt à glisser sur le plan fixe* AX *en faisant reculer le mur. Il s'agit de déterminer le plan* AX *par la condition de rendre un maximum la résultante des forces que le prisme séparé exerce sur le mur de revêtement. On néglige la cohésion des terres entre elles et avec la paroi du mur.*

Fig. 16.



Le plan AX déterminé par cette condition est nommé d'après Coulomb *plan de rupture*, parce qu'on admet que la rupture commencera sur ce plan, si la réaction du mur vient à n'être plus suffisante pour maintenir l'équilibre.

Soient p le poids des terres sous l'unité de volume;

$\tang\varphi$ et $\tang\varphi'$ les coefficients de frottement des terres sur elles-mêmes et sur la paroi du mur;

α l'angle que la paroi du mur fait sur le plan horizontal AH du côté du massif;

P le poids du prisme;

R et S les résultantes des réactions du mur et du plan de rupture sur le prisme;

β l'angle que le plan de rupture fait sur le plan horizontal AH du côté du massif.

Les forces P, R, S, transportées en un même point, doivent se faire équilibre; on a donc

$$\frac{R}{P} = \frac{\sin(\widehat{P, S})}{\sin(\widehat{R, S})}.$$

Si l'on observe que φ' et φ sont les inclinaisons des forces R et S sur les normales au mur et au plan de rupture, on reconnaît aisément que l'angle $(\widehat{P, S})$ est égal à $\pi - \beta + \varphi$ et l'angle $(\widehat{R, S})$ à $\pi - (\alpha - \beta) - \varphi - \varphi'$. Par suite,

$$(1) \qquad R = P\,\frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha - \beta + \varphi + \varphi')}.$$

Il nous faut exprimer le poids P à l'aide d'un élément géométrique qui fixe la position du plan AX; alors la question sera réduite à déterminer le maximum d'une fonction d'une seule variable.

Pour ce calcul il suffira évidemment de considérer une longueur du prisme égale à l'unité; en outre il faudra supposer que l'on connaisse le côté du profil polygonal qui est coupé par le plan de rupture.

Soient EF ce côté;

ω son inclinaison à l'horizon, qui sera positive si la

droite EF s'élève en s'éloignant du mur du côté du massif;

h la distance du point A au côté EF;

AI une droite tellement inclinée, que le triangle formé par cette droite, le côté EF et la droite AX, soit équivalent au polygone ABCDEX (cette droite AI est connue);

λ l'angle que la droite AI fait avec l'horizontale AH du côté du massif.

Première solution. — On prend pour inconnue la quantité $\operatorname{tang}(\beta - \varphi)$.

L'expression de l'aire du triangle AIX, en fonction de la hauteur et des trois angles, donne d'abord

$$P = p\frac{h^2}{2}\frac{\sin(\lambda - \beta)}{\sin(\lambda - \omega)\sin(\beta - \omega)}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (1), que l'on remplace ensuite $\sin(\lambda - \beta)$, $\sin(\beta - \omega)$, $\sin(\alpha - \beta + \varphi + \varphi')$ par les expressions équivalentes

$$\sin(\lambda - \varphi)\cos(\beta - \varphi) - \sin(\beta - \varphi)\cos(\lambda - \varphi),$$
$$\sin(\beta - \varphi)\cos(\varphi - \omega) + \sin(\varphi - \omega)\cos(\beta - \varphi),$$
$$\sin(\alpha + \varphi')\cos(\beta - \varphi) - \sin(\beta - \varphi)\cos(\alpha + \varphi'),$$

et que l'on pose, pour abréger,

$$p\frac{h^2}{2}\frac{\cos(\lambda - \varphi)}{\sin(\lambda - \omega)\cos(\varphi - \omega)\cos(\alpha + \varphi')} = A,$$
$$\operatorname{tang}(\lambda - \varphi) = a, \quad \operatorname{tang}(\varphi - \omega) = b, \quad \operatorname{tang}(\alpha + \varphi') = c,$$
$$\operatorname{tang}(\beta - \varphi) = x,$$

il vient

$$(2) \qquad R = A\frac{x(x - a)}{(x + b)(x - c)}.$$

La valeur de x qui rend cette pression un maximum

vérifie l'équation

$$(3)\quad \frac{dR}{dx} \text{ ou } A\frac{(a+b)x(x-c)-c(x-a)(x+b)}{(x+b)^2(x-c)^2}=0.$$

On en tire

$$\frac{x-c}{x+b}=\frac{c(x-a)}{x(a+b)}=\frac{c(c-a)}{x(a+b-c)-bc}$$
$$=\frac{x(a+b-c)-bc}{b(a+b)}=\pm\sqrt{\frac{c(c-a)}{b(a+b)}}.$$

Pour obtenir la valeur de la dérivée seconde $\frac{d^2R}{dx^2}$ qui répond à la double valeur de x, il suffit de remplacer dans l'expression (3) le numérateur par sa dérivée, puis de substituer la double valeur en question ; on trouve ainsi

$$\frac{d^2R}{dx^2}=A\frac{2x(a+b-c)-2bc}{(x+b)^2(x-c)^2}$$
$$=A\frac{2b(a+b)}{(x+b)^2(x-c)^2}\times\pm\sqrt{\frac{c(c-a)}{b(a+b)}}.$$

La valeur correspondante de R s'obtient de suite, en observant que l'équation (3) peut s'écrire, d'après la formule (2),

$$\left[\frac{A(a+b)}{c}\left(\frac{x}{x+b}\right)^2-R\right]\frac{c}{x(x-c)}=0,$$

et que d'ailleurs on a identiquement

$$(b+c)\frac{x}{x+b}=c+b\frac{x-c}{x+b}.$$

Il vient

$$R = \frac{Ac(a+b)}{(b+c)^2}\left(1 \pm \frac{b}{c}\sqrt{\frac{c(c-a)}{b(a+b)}}\right)^2.$$

R ne pouvant être négatif, il s'ensuit que le facteur $Ac(a+b)$ est positif. Divisant par ce facteur la valeur de la dérivée $\frac{d^2R}{dx^2}$ obtenue précédemment, on voit que cette dérivée a le signe de la quantité

$$\pm \frac{b}{c}\sqrt{\frac{c(c-a)}{b(a+b)}}.$$

Si donc on nomme K la valeur numérique de cette dernière quantité, la formule

$$\begin{aligned} R &= \frac{Ac(a+b)}{(b+c)^2}(1 \pm K)^2 \\ &= p\frac{h^2}{2}\frac{\sin(\alpha+\varphi')}{\sin^2(\alpha-\omega+\varphi+\varphi')}(1 \pm K)^2 \end{aligned}$$

représentera la pression maximum quand on prendra le signe inférieur, et la pression minimum quand on prendra le signe supérieur.

Les valeurs correspondantes de x sont

$$x = \frac{(1 \pm K)\tang(\alpha+\varphi')}{1 \mp \frac{\tang(\alpha+\varphi')}{\tang(\varphi-\omega)}K},$$

et l'on a

$$K = \sqrt{\frac{\sin(\alpha-\lambda+\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\omega)}{\sin(\lambda-\omega)\sin(\alpha+\varphi')}}.$$

Le minimum ne répond pas au problème actuel; mais, si l'on change les signes des angles φ et φ' dans les formules relatives au minimum, elles donneront la solution du pro-

blème correspondant à celui qui nous occupe, pour le cas où le mur tendrait à s'avancer dans l'intérieur du massif en soulevant un prisme de terre.

Observons encore que, dans les deux cas, si l'on s'était trompé sur le choix du côté EF coupé par le prisme, les formules en avertiraient, et l'on aurait à recommencer le calcul en choisissant un autre côté. Au reste, un peu d'attention suffira d'ordinaire pour éviter ces tâtonnements fâcheux.

Comme application, supposons que la surface supérieure du terrain soit un plan horizontal, et que l'on puisse négliger le frottement des terres contre le parement du mur. Alors on aura $\omega = 0$, $\lambda = \alpha$, $\varphi' = 0$, et l'on trouvera facilement la pression maximum

$$R = \frac{1}{2} p \frac{h^2}{\sin \alpha} \frac{\sin^2 \frac{\alpha - \varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha + \varphi}{2}},$$

ainsi que l'inclinaison du plan de rupture,

$$\beta = \frac{\alpha + \varphi}{2} \text{ (*)}.$$

Deuxième solution. — Joignons le point A au côté EF par deux droites AM, AN, situées de part et d'autre de la droite AB, et formant avec elle les angles $\alpha - \varphi$, $\varphi + \varphi'$. Entre les droites MN, AN, menons des droites II′, XX′ parallèles à AM. L'inconnue sera la position du point X′.

(*) M. Saint-Guilhem, auquel nous empruntons cette solution (*Journal de M. Liouville*, t. IX, p. 1; 1844), l'étend au cas où l'on tient compte de la cohésion des terres entre elles et avec la paroi du mur. Mais, comme l'objet de ce calcul est de déterminer l'épaisseur qu'il faut donner au mur pour qu'il ne soit point repoussé, il est plus sûr de ne pas supposer une cohésion qui peut être anéantie par un ébranlement fortuit.

La Géométrie nous donne les relations

$$P = \frac{1}{2} p h \overline{IX},$$

$$\frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha - \beta + \varphi + \varphi')} = \frac{\overline{AX'}}{\overline{XX'}},$$

$$\frac{\overline{IX}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{I'X'}}{\overline{AN}},$$

$$1 = \frac{\overline{AN}}{\overline{AM}} \frac{\overline{XX'}}{\overline{NX'}},$$

$$h\overline{MN} = \overline{AN}.\overline{AM} \sin(\alpha + \varphi').$$

Égalant le produit des premiers membres à celui des seconds membres, il vient (1)

$$R = \frac{1}{2} p \overline{AN} \sin(\alpha + \varphi') \frac{\overline{I'X'}.\overline{AX'}}{\overline{NX'}}.$$

Or, si l'on pose avec M. Belanger (*Cours de l'École Polytechnique*),

$$\overline{NA} = a, \quad \overline{NI'} = i, \quad \overline{NX'} = x,$$

on voit aisément que le maximum de la fraction

$$\frac{\overline{I'X'}.\overline{AX'}}{\overline{NX'}} = \frac{(x - i)(a - x)}{x}$$

répond à $x = \sqrt{ai}$. Telle est donc la distance du point X′ au point N.

Le point X′ étant connu, il suffira de mener par ce point une parallèle par la droite AM pour avoir la position du point X et, par suite, celle du plan de rupture.

Le maximum de la résultante R est

$$R = \frac{1}{2} p \sin(\alpha + \varphi') \left(a - \sqrt{ai}\right)^2,$$

$$R = \frac{1}{2} p \sin(\alpha + \varphi') \overline{AX'}^2.$$

Les considérations géométriques sur lesquelles se fonde cette solution sont dues à M. Poncelet (*).

4. *Restant dans les conditions du problème précédent, on demande de trouver le centre de poussée, c'est-à-dire le point d'application de la pression normale sur le parement du mur.*

Soient $l = \mathrm{AB}$ la hauteur du mur, $\bar{z}$ la distance du centre de poussée à l'arête de couronnement B, R_z la pression normale exercée sur la partie du mur qui est comprise entre l'arête de couronnement et une horizontale située à la distance z; on admet que cette pression est la pression maximum que donnent les formules du problème précédent appliquées à la partie du mur considérée.

Écrivant que le moment de la pression résultante R autour de l'arête B est égal à la somme des moments des composantes, il vient

$$\mathrm{R}\bar{z} = \int_0^l z \frac{d\mathrm{R}_z}{dz} dz.$$

La question est ramenée à une quadrature.

Pour le cas d'une terrasse dont le plan supérieur monte à partir de l'arête de couronnement, en faisant avec l'horizon un angle ω, moindre que l'angle φ du talus naturel des terres, R_z est proportionnel à z^2, et, par suite, on a

$$\bar{z} = \frac{2}{3} l.$$

(*) Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations (*Mémorial de l'Officier du Génie*, n° 13; 1840).

CHAPITRE IV.

ÉQUILIBRE DE PLUSIEURS CORPS.

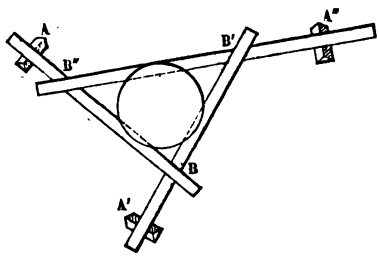
Pour un système composé de plusieurs corps solides, on détermine toutes les circonstances de l'équilibre par l'ensemble des équations qui expriment que chacun des corps est séparément en équilibre, sous l'influence de toutes les forces qui le sollicitent

SECTION I.

ÉQUILIBRE SANS FROTTEMENT.

1. *Trois tiges métalliques pesantes* AB, A′B′, A″B″ *légèrement flexibles sont enlacées entre elles comme le représente la figure ci-jointe, et sont sensiblement horizontales. Leurs extrémités* A, A′, A″ *s'appuient sur trois supports; les autres extrémités* B, B′, B″ *soutiennent un corps pesant. On demande de calculer les pressions qui s'exercent entre les tiges aux points* B, B′, B″.

Fig. 17.



Soient 2P, 2P′, 2P″ les poids des tiges; Q, Q′, Q″ les poids que portent les extrémités B, B′, B″; a, a', a'' les

longueurs des tiges; b, b', b'' les longueurs des segments AB″, A′B, A″B′; x, x', x'' les pressions qui s'exercent aux points B, B′, B″.

Considérons la tige AB. Au point B agit le poids P provenant de la pesanteur de la tige, le poids Q et le poids produit par la pression x'' agissant sur le levier AB″B; ce dernier poids est égal à $\frac{b}{a}x''$. Nous avons donc

$$P + Q + \frac{b}{a}x'' = x,$$

et de même, par permutation circulaire,

$$P' + Q' + \frac{b'}{a'}x = x',$$

$$P'' + Q'' + \frac{b''}{a''}x' = x''.$$

En posant, pour abréger,

$$P + Q = R, \quad P' + Q' = R', \quad P'' + Q'' = R'',$$

les équations précédentes nous donnent

$$\left(1 - \frac{bb'b''}{aa'a''}\right)x = R + \frac{bb''}{aa''}R' + \frac{b}{a}R'',$$

$$\left(1 - \frac{bb'b''}{aa'a''}\right)x' = R' + \frac{b'b}{a'a}R'' + \frac{b'}{a'}R,$$

$$\left(1 - \frac{bb'b''}{aa'a''}\right)x'' = R'' + \frac{b''b'}{a''a'}R + \frac{b''}{a''}R'.$$

Si $a = a' = a''$ et $b = b' = b''$, il vient

$$x = \frac{a}{a-b} \cdot \frac{Ra^2 + R''ab + R'b^2}{a^2 + ab + b^2},$$

et, si $R = R' = R''$,

$$x = \frac{aR}{a-b}.$$

Bien des enfants savent que trois couteaux de table à lame un peu flexible peuvent en réalisant cet assemblage supporter un poids assez considérable.

2. *Entre deux plans inclinés on place deux sphères homogènes, de telle manière qu'elles s'appuient l'une contre l'autre, et que chacune d'elles touche l'un des plans. Déterminer la position d'équilibre.*

On voit d'abord que l'intersection des deux plans doit être horizontale, et que la ligne des centres doit être perpendiculaire à cette intersection. Le problème sera donc résolu, si nous déterminons l'angle θ que la ligne des centres fait avec l'horizon.

Soient R la réaction mutuelle des deux sphères, P et P′ les poids de ces sphères, α et α' les angles aigus que les deux plans forment avec l'horizon; admettons que l'angle α se rapporte au plan qui touche la sphère P, dont le centre est le moins élevé. Par les points de contact entre les plans et les sphères, abaissons des perpendiculaires sur l'intersection des deux plans, et projetons sur ces deux droites les forces qui sollicitent chacun des deux corps. Il vient

$$R\cos(\alpha+\theta)=P\sin\alpha,$$
$$R\cos(\alpha'-\theta)=P'\sin\alpha';$$

d'où l'on tire, par l'élimination de R,

$$\operatorname{tang}\theta=\frac{P'\operatorname{tang}\alpha'-P\operatorname{tang}\alpha}{(P'+P)\operatorname{tang}\alpha'\operatorname{tang}\alpha}.$$

3. *Trois sphères homogènes sont placées dans l'intérieur d'une sphère creuse, de telle sorte que les quatre centres soient dans un même plan vertical. Déterminer la position des trois premières sphères, lorsqu'elles sont en équilibre.*

Soient C le centre de la sphère creuse, c, c', c'' ceux

des trois autres sphères, P, P′, P″ les poids de ces sphères, d, d', d'' les distances de leurs centres à celui de la sphère creuse, θ l'angle que Cc' forme avec l'horizon, α l'angle cCc', α'' l'angle c''Cc'. Admettons que les lettres c', d' se rapportent à la sphère qui est touchée par les deux autres, et que la verticale du point C passe entre les points c, c'.

Nous pouvons considérer l'ensemble des trois sphères intérieures comme ne formant qu'un seul corps solide; car ce corps sera en équilibre, si chacune des trois sphères est séparément en équilibre. Prenons par rapport au point C les moments des forces qui sollicitent ce corps composé. Il vient

$$\mathrm{P}d\cos(\theta+\alpha)+\mathrm{P}'d'\cos\theta+\mathrm{P}''d''\cos(\theta-\alpha'')=0;$$

d'où

$$\operatorname{tang}\theta=\frac{\mathrm{P}d\cos\alpha+\mathrm{P}'d'+\mathrm{P}''d''\cos\alpha''}{\mathrm{P}d\sin\alpha-\mathrm{P}''d''\sin\alpha''}.$$

Cette relation suffit pour déterminer la position d'équilibre, car toutes les quantités qui entrent dans le second membre s'expriment aisément en fonction des rayons des sphères, lesquels sont connus.

4. *Deux barres pesantes et homogènes reposent leurs extrémités inférieures sur un même plan horizontal, et appuient leurs extrémités supérieures l'une contre l'autre. On admet que la petite surface de contact entre les deux extrémités est dans un plan vertical, et que les extrémités inférieures ne peuvent glisser sur le plan qui les supporte. Déterminer la position d'équilibre.*

Soient P, P′ les poids des deux barres, θ, θ' leurs inclinaisons à l'horizon, et R leur réaction mutuelle, qui est horizontale.

Si l'on prend les moments des forces qui sollicitent

chaque barre, autour de l'extrémité inférieure, il vient

$$P\cos\theta = 2R\sin\theta,$$
$$P'\cos\theta' = 2R\sin\theta';$$

d'où

$$\frac{P}{P'} = \frac{\tang\theta}{\tang\theta'}.$$

FRANCHINI, *Memorie della Società italiana*, t. XVI, part. 1, p. 237; 1813.

5. *Deux cylindres sont liés l'un contre l'autre par un fil inextensible. Déterminer le rapport de la tension du fil à la réaction mutuelle des deux cylindres.*

Considérons la section faite par le plan qui contient le fil et qui est perpendiculaire aux cylindres.

Soient 2α l'angle au centre sous-tendu par l'arc que le fil recouvre sur le plus petit des cercles de section, r et r' les rayons de ces deux cercles, T la tension du fil, et R la réaction mutuelle des deux cylindres.

Si nous projetons sur la ligne des centres les forces qui sollicitent l'un des cylindres, il vient

$$R = T\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\alpha\, d\alpha = 2T\sin\alpha;$$

d'ailleurs, si l'on suppose $r > r'$, la Géométrie nous donne

$$\cos\alpha = \frac{r-r'}{r+r'},\quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{(r+r')^2-(r-r')^2}}{r+r'} = \frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'};$$

par conséquent,

$$\frac{T}{R} = \frac{r+r'}{4\sqrt{rr'}}.$$

6. *Deux fils inextensibles sont attachés en un même point fixe; l'un supporte une sphère, l'autre soutient un poids qui pend au-dessous de la sphère sans la*

toucher. Déterminer l'angle que le premier fil fait avec la verticale.

Soient P le poids que soutient le second fil, Q — P le poids de la sphère, a le rayon de la sphère, et b la distance du centre au point de suspension.

L'angle cherché est $\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{Pa}{Qb}\right)$.

7. *Une tige rigide et sans poids* ACB *est liée à deux points fixes* A, C, *et porte un poids* P *à son extrémité* B. *Déterminer les pressions exercées sur les deux points fixes.*

Soient a la longueur de la barre, α son inclinaison sur la verticale, b la distance AC des deux points d'attache, F et G les pressions parallèles à la barre qui sont exercées sur les points A et C, R et S les pressions perpendiculaires à la barre qui sont exercées sur les mêmes points.

On trouve

$$F + G = P\cos\alpha,$$

$$S = \frac{a}{b}P\sin\alpha, \quad R = \frac{a-b}{b}P\sin\alpha.$$

L'une des pressions F, G est arbitraire.

8. *Un cylindre creux, très-mince, de rayon r', ouvert à ses deux extrémités, est posé debout sur un plan horizontal. On place dans l'intérieur deux sphères égales, dont on connaît le poids* P, *et le rayon r plus grand que $\frac{r'}{2}$. Quel doit être au moins le poids du cylindre pour que celui-ci reste debout après l'introduction des sphères?*

Le poids du cylindre doit être égal ou supérieur à $2P\left(1 - \frac{r}{r'}\right)$.

9. *Deux sphères inégales sont suspendues aux deux*

extrémités d'un fil très-mince, engagé dans un petit anneau. On conçoit que les deux sphères puissent être en équilibre, si elles se touchent, et que le centre de la plus légère soit plus bas que celui de la plus pesante. Prouver que dans cet état d'équilibre les distances des centres des sphères à l'anneau de suspension sont en raison inverse des poids de celles-ci. On néglige le poids du fil, son frottement sur l'anneau, et le frottement des sphères entre elles.

SECTION II.

ÉQUILIBRE AVEC FROTTEMENT.

1. *On place une sphère pesante et homogène dans l'intérieur d'un angle dièdre, dont l'arête est horizontale, et qui est formé par deux lames égales et rectangulaires, libres de tourner autour de l'arête commune. Les bords extrêmes des deux lames sont réunis par un fil dont on augmente graduellement la tension. Déterminer la valeur qu'a cette tension lorsque la sphère commence à prendre un mouvement ascendant.*

Admettons, pour plus de simplicité, que les deux lames soient homogènes; nommons Q le poids de chacune d'elles, 2α leur inclinaison mutuelle, $2a$ la longueur de leurs côtés inclinés, R, R′ et F, F′ les pressions normales et les frottements qu'elles exercent sur la sphère, μ, μ' les coefficients de frottement, P le poids de la sphère, r son rayon, et T la tension du fil.

Lorsque le système est en équilibre, son centre de gravité est situé dans le plan vertical qui contient l'arête fixe; d'où il suit que les deux lames font des angles égaux avec l'horizon. De plus, la symétrie du système montre que l'on a

$$R' = R \quad \text{et} \quad F' = F.$$

Ceci posé, projetons sur la verticale les forces qui sollicitent la sphère, et prenons autour de l'arête fixe les moments des forces qui sollicitent la première lame. Il vient

$$2F\cos\alpha + P = 2R\sin\alpha,$$
$$Rr\cot\alpha + Qa\sin\alpha = 2Ta\cos\alpha.$$

La sphère ne peut prendre un mouvement ascendant sans glisser sur l'une des lames; par conséquent, elle commencera à monter lorsque le frottement F sera devenu égal à la plus petite des quantités μR, $\mu' R'$. Supposons que μ soit inférieur à μ'; alors la sphère commencera par glisser sur la première lame, à laquelle se rapporte le coefficient μ, et elle roulera sur l'autre face du dièdre. A cet instant on aura, d'après les équations précédentes,

$$R = \frac{P}{2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)},$$
$$T = \frac{Pr}{4a\sin\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} + \frac{1}{2}Q\tang\alpha,$$

ou, si l'on pose $\mu = \tang\varepsilon$,

$$R = \frac{P\cos\varepsilon}{2\sin(\alpha - \varepsilon)}, \quad T = \frac{Pr\cos\varepsilon}{4a\sin\alpha\sin(\alpha - \varepsilon)} + \frac{1}{2}Q\tang\alpha.$$

2. *Deux roues égales* O, O′, *situées dans un même plan vertical, sont posées sur un plan incliné; leurs axes sont réunis par une barre homogène, qui porte en son milieu un poids* Q; *l'une des roues* O *est enrayée, l'autre est libre. Quelle est la plus grande inclinaison du plan qui soit compatible avec l'équilibre du chariot?*

Soient r le rayon des roues, P leur poids, $2a$ la longueur de la barre qui unit les axes, q le poids de cette barre, X et Y les composantes de la réaction de la roue libre sur la barre estimées suivant une parallèle et suivant

une perpendiculaire au plan incliné, R et R′ les réactions normales du plan sur les deux roues O et O′, φ l'inclinaison du plan, μ le coefficient de frottement entre le plan et la roue O.

Considérons l'ensemble de la barre et de la roue enrayée, comme ne formant qu'un seul corps; et supposons que ce corps soit sur le point de glisser. Si nous projetons les forces qui le sollicitent, d'abord sur une perpendiculaire au plan incliné, puis sur une parallèle, et que nous prenions leurs moments par rapport à l'axe de la roue, il vient

$$\begin{aligned} R + Y &= (P + Q + q)\cos\varphi, \\ \mu R - X &= (P + Q + q)\sin\varphi, \\ \mu R r + 2aY &= (Q + q)\,a\cos\varphi. \end{aligned}$$

Prenons maintenant les moments des forces qui sollicitent la roue libre, par rapport à son point de contact avec le plan. Nous trouvons

$$Xr = Pr\sin\varphi.$$

L'élimination des quantités X, Y, R, entre les quatre équations qui précèdent, nous donne la tangente de l'inclinaison cherchée

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\mu a}{2a - \mu r}.$$

3. *Deux barres égales* AC, BC *sont réunies en* C *par une charnière sans frottement, et leurs extrémités inférieures reposent sur un plan horizontal. On connaît par observation la plus grande valeur* β *de l'angle* ACB *qui soit compatible avec l'équilibre, et l'on veut avoir le coefficient de frottement entre les extrémités inférieures et le plan.*

Ce coefficient de frottement est égal à $\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}$.

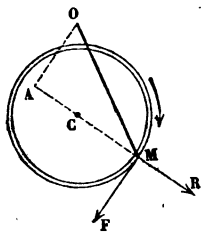
4. *L'arcanseur-cale, imaginé par M. Blotin pour empêcher le recul des voitures, se compose d'une tige en fer* OM *mobile autour d'un axe horizontal* O, *qui est solidement implanté dans le châssis de la voiture, au-dessus de la roue. L'extrémité* M *de la tige est pliée horizontalement en forme de crochet.*

Quand on veut se servir de cet appareil, on laisse tomber la tige en arrière de la roue; le crochet s'arrête contre la jante un peu plus bas que l'essieu, et la presse par l'effet de la pesanteur, à la manière d'un léger frein.

A quelle condition doit satisfaire cet appareil pour que le frottement du crochet sur la jante s'oppose à tout mouvement rétrograde de la roue?

Soient C le centre de la roue, OA une perpendiculaire à MC, μ le coefficient de frottement au départ entre la roue et le crochet, R la pression normale de la roue sur le crochet.

Fig. 18.



Supposons la roue immobile, et imaginons qu'on exerce sur elle un effort tendant à la faire rétrograder dans le sens de la flèche. La tige reste en équilibre sous l'action de son poids, de la pression R dirigée dans le sens du rayon CM, et d'une résistance au frottement dirigée suivant la tangente au cercle dans la direction MF.

Nous représenterons par Pa le moment du poids de la tige relatif à l'axe O, et par μ'R la résistance au frottement. μ' sera une quantité positive, croissant avec l'effort exercé, toujours inférieure ou égale à μ.

L'équation des moments relatifs au point O est

$$Pa + \mu' R.\overline{MA} - R.\overline{OA} = 0.$$

On en tire

$$R = \frac{Pa}{\overline{OA} - \mu'\overline{MA}}.$$

D'après cette formule on voit que la pression R augmente en même temps que μ' avec l'effort exercé pour imprimer à la roue un mouvement rétrograde, et devient infinie quand

$$\mu' = \frac{OA}{MA}.$$

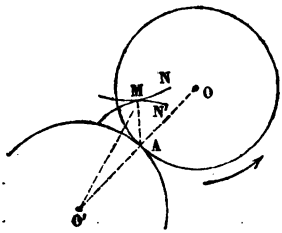
Il s'ensuit que dans le cas où μ est égal ou supérieur à $\frac{OA}{MA}$ le mouvement rétrograde est impossible.

La condition cherchée est donc que l'angle de frottement arc tang μ soit inférieur à l'angle aigu que la tige fait avec le rayon de la roue mené au point de contact. Il est aisé de voir que l'appareil n'oppose à la marche de la roue en avant qu'un léger frottement dont la valeur est

$$\mu R = \frac{\mu P a}{\overline{OA} + \mu\overline{MA}}.$$

5. O *et* O′ *sont deux roues dentées formant un engrenage; les dents en prise sont* MN *et* MN′. *Les circonférences primitives, dont les centres sont* O *et* O′, *se touchent au point* A. *La première roue conduit la seconde.*

Fig. 19.



Il s'agit de démontrer que, quel que soit l'effort exercé sur la roue motrice pour la faire tourner dans le sens de la flèche, le mouvement n'aura lieu qu'à la condition que l'angle de frottement

au départ entre les deux roues, arc tang μ, *soit plus petit que l'angle* AMO'.

Quand cette condition n'est point satisfaite, il y a *arc-boutement* entre les deux roues.

SECTION III.

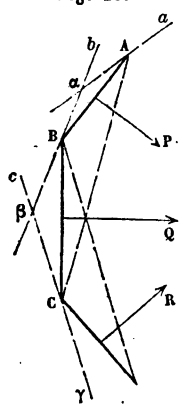
ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES ARTICULÉS. — POLYGONE FUNICULAIRE.

1. *Plusieurs tiges rigides et sans poids sont réunies bout à bout par des charnières, de manière à former un polygone plan à angles variables. Chaque tige est sollicitée par une force proportionnelle à sa longueur, appliquée en son point milieu, et qui est dirigée suivant la perpendiculaire menée dans le plan de la figure. Quelle est la forme du polygone lorsque le système est en équilibre?*

Fuss, *Mémoires de Saint-Pétersbourg*, 1817-1818, p. 46.

Soient A, B, C, D, etc., les sommets du polygone; p, q, r, etc., les réactions mutuelles qui ont lieu entre les côtés qui aboutissent aux sommets A, B, C, etc.; Aα, αBβ, βCγ les droites suivant lesquelles sont dirigées ces réactions; P, Q, R, etc., les forces appliquées aux côtés AB, BC, CD, etc.

Fig. 20.



La tige BC étant en équilibre sous l'action de la force Q et des réactions q et r dirigées suivant Bβ et Cβ, il s'ensuit que ces trois forces se rencontrent en un même point, que le triangle BβC est isocèle, et que les réactions q et r sont égales.

De plus, la réaction q, estimée en sens contraire de la force Q, est égale à la moitié de cette dernière force, c'est-à-dire que l'on a

$$q \sin CB\beta = \frac{1}{2} Q;$$

de même,

$$p \sin AB\alpha = \frac{1}{2} P,$$

et, par suite,

$$\frac{\sin CB\beta}{\sin AB\alpha} = \frac{BC}{BA}.$$

Dans le triangle ABC on a pareillement

$$\frac{\sin CAB}{\sin ACB} = \frac{BC}{BA};$$

d'ailleurs,

$$CB\beta + AB\alpha = CAB + ACB;$$

par conséquent,

$$CB\beta = CAB \quad \text{et} \quad AB\alpha = ACB.$$

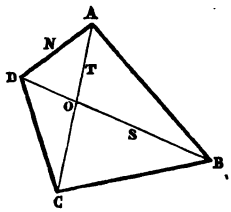
Faisons passer une circonférence par les points A, B, C. D'après la relation que nous venons de trouver, elle est tangente à la droite $\alpha\beta$. Puisque les triangles $A\alpha B$ et $B\beta C$ sont isocèles, elle est aussi tangente aux droites $A\alpha$ et βC. Cette même circonférence passe par les autres sommets du polygone et est tangente aux droites suivant lesquelles s'exerce la pression à ces sommets; car si nous faisons passer une circonférence par les sommets B, C, D, elle aura avec la première circonférence deux tangentes communes aux deux mêmes points B, C, et par conséquent se confondra avec elle.

D'après cela, quand l'équilibre a lieu, le polygone est inscriptible, les pressions mutuelles des tiges aux articulations sont dirigées suivant les tangentes au cercle circonscrit, elles sont égales entre elles; le rapport de la

force Q appliquée au côté BC, à la pression q qui s'exerce entre deux tiges, est égal à $2 \sin CAB$, est égal au rapport du côté BC au rayon du cercle circonscrit.

2. *Un quadrilatère* ABCD *est formé par quatre tiges rigides et sans poids, qui peuvent tourner librement autour des sommets comme charnières; deux fils,* AC, BD, *dont on connaît les tensions* T, S, *joignent les sommets opposés. On demande la condition géométrique que le quadrilatère doit vérifier pour que l'équilibre ait lieu.*

Fig. 21.



EULER, *Acta Acad. Petrop.*, 1779; part. II, p. 106.

Soient O l'intersection des deux diagonales, et N la réaction mutuelle qui a lieu entre les points A, D par l'intermédiaire de la tige.

Prenons autour du sommet B les moments des forces qui sollicitent la tige AB. Il vient

$$N.BD \sin(\widehat{ADB}) = T.BO \sin(\widehat{BOC}).$$

On aura de même, pour le sommet C et la tige CD,

$$N.AC \sin(\widehat{CAD}) = S.CO \sin(\widehat{BOC}),$$

d'où

$$\frac{T.BO}{S.CO} = \frac{BD.\sin(\widehat{ADB})}{AC.\sin(\widehat{CAD})} = \frac{BD.\sin(\widehat{ADO})}{AC.\sin(\widehat{DAO})} = \frac{BD.AO}{AC.DO},$$

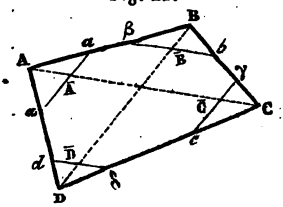
$$\frac{T}{S} = \frac{BD.AO.CO}{AC.DO.BO}.$$

Cette condition est nécessaire pour l'équilibre; de plus, elle est suffisante, car si les côtés AB et DC ne tournent

pas autour des sommets A et C, le quadrilatère ne se déforme point.

3. *Un quadrilatère* ABCD *est formé par quatre tiges rigides et sans poids, qui peuvent tourner librement autour des sommets comme charnières; les tiges contiguës sont réunies deux à deux par des fils* $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$, *dont on connaît les tensions* $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$. *Quelle est la condition géométrique que le quadrilatère doit vérifier pour être en équilibre?*

Fig. 22.



La force $\overline{A}$, qui est appliquée au point a, peut se décomposer en deux forces parallèles : l'une appliquée en A et l'autre B′ appliquée en B. Cette dernière est égale à

$$\overline{A}\,\frac{Aa}{AB}.$$

Elle peut à son tour se décomposer, d'après la loi du parallélogramme, en deux forces : l'une dirigée suivant BA et appliquée en A, l'autre B″ dirigée suivant la diagonale BD. Cette dernière est égale à

$$B'\,\frac{\sin Aa\alpha}{\sin ABD}.$$

Or les triangles $Aa\alpha$ et ABD nous donnent

$$\frac{\sin Aa\alpha}{\sin A}=\frac{A\alpha}{a\alpha},\quad \frac{\sin A}{\sin ABD}=\frac{BD}{AD}.$$

Il s'ensuit

$$B''=\overline{A}\,\frac{Aa.A\alpha.BD}{AB.a\alpha.AD}.$$

Décomposons de la même manière la force $\overline{A}$, qui est appliquée au point α, en deux forces appliquées en A et une force D″ appliquée en D, dirigée suivant DB.

La somme des moments des deux forces $\overline{A}$ égales et contraires appliquées aux points a et α, étant nulle par rapport à tout point de l'espace, il en résulte que les composantes B″ et D″ sont égales et contraires (*), et que les quatre composantes appliquées au point A se font équilibre.

On voit donc que nous pouvons remplacer le fil $a\alpha$ par un fil dirigé suivant la diagonale BD, et dont la tension sera

$$\overline{A}\,\frac{A\alpha.Aa.BD}{a\alpha.DA.BA}.$$

Nous remplacerons pareillement le fil $c\gamma$ par un fil dirigé suivant la même diagonale BD, et dont la tension sera

$$\overline{C}\,\frac{C\gamma.Cc.DB}{c\gamma.BC.DC}.$$

Les deux fils $a\alpha$, $c\gamma$ se trouvent alors remplacés par un seul fil dirigé suivant la diagonale BD, et dont la tension est égale à la somme

$$\overline{A}\,\frac{A\alpha.Aa.BD}{a\alpha.DA.BA}+\overline{C}\,\frac{C\gamma.Cc\ DB}{c\gamma.BC.DC}.$$

Aux deux fils $b\beta$, $d\delta$, nous substituons de même un seul fil dirigé suivant la diagonale AC, et dont la tension est égale à la somme

$$\overline{B}\,\frac{B\beta.Bb.CA}{b\beta.AB.CB}+\overline{D}\,\frac{D\delta.Dd.AC}{d\delta.CD.AD}.$$

(*) On reconnaît, en effet, que la valeur de B″ ne change pas par la permutation de B en D et de a en α.

Nous rentrons ainsi dans le problème précédent, et, d'après ce problème, la relation cherchée est

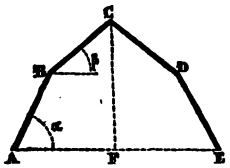
$$\frac{\mathrm{OB.OD}}{\overline{\mathrm{BD}}^2}\left(\frac{\overline{\mathrm{B}}.\mathrm{B}\beta.\mathrm{B}b}{b\beta.\mathrm{AB.CB}}+\frac{\overline{\mathrm{D}}.\mathrm{D}\delta.\mathrm{D}d}{d\delta.\mathrm{CD.AD}}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{OA.OC}}{\overline{\mathrm{AC}}^2}\left(\frac{\overline{\mathrm{A}}.\mathrm{A}\alpha.\mathrm{A}a}{a\alpha.\mathrm{DA.BA}}+\frac{\overline{\mathrm{C}}.\mathrm{C}\gamma.\mathrm{C}c}{c\gamma.\mathrm{BC.DC}}\right).$$

EULER, *Acta Acad. Petrop.*, 1779; part. II, p. 106.

4. *Quatre barres égales et homogènes* AB, BC, CD, DE, *réunies bout à bout par des charnières* B, C, D, *sont en équilibre dans un plan vertical; les extrémités* A, E *sont engagées dans deux charnières situées sur une même horizontale; on connaît la distance* AE, *ainsi que la hauteur du sommet* D *au-dessus de l'horizontale* AE. *Déterminer les conditions d'équilibre.*

Fig. 23.



Soient α et β les angles que forment avec l'horizon les deux barres inférieures AB, ED et les deux barres supérieures BC, DC.

La seule condition d'équilibre est

$$\tang\alpha = 3\tang\beta.$$

Du sommet C abaissons une perpendiculaire CF sur l'horizontale AE. Soient $\mathrm{CF}=a$, $\mathrm{AF}=\mathrm{EF}=b$, et x, y les distances du sommet B aux deux droites CF, AF. On trouve, dans le cas d'équilibre,

$$x=\frac{a^2+2b^2-(a^4+a^2b^2+b^4)^{\frac{1}{2}}}{2b},$$

$$y=\frac{b^2+2a^2-(b^4+a^2b^2+a^4)^{\frac{1}{2}}}{2a}.$$

Ces dernières formules ont été données par Couplet dans ses *Recherches sur la construction des combles de charpente* (*).

5. *Polygone funiculaire.* — Soient :

$M_0M_1M_2 \ldots M_{n-1}M_n$ un polygone funiculaire en équilibre ;

$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ les forces appliquées aux sommets $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$;

$T_1, T_2, \ldots, T_n$ les tensions des cordons $M_0M_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n$.

On peut supposer le polygone solidifié, et l'équilibre ne cessera pas d'avoir lieu. Or l'équilibre d'un corps solide exige que les projections des forces sur une direction quelconque fassent une somme nulle ; donc les projections des forces P et des tensions extrêmes T_1, T_n sur une direction quelconque font une somme nulle. Par suite, si l'on trace, à partir d'un point arbitraire, des droites consécutives parallèles et proportionnelles aux forces T_1, $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, T_n, ces droites formeront un polygone fermé.

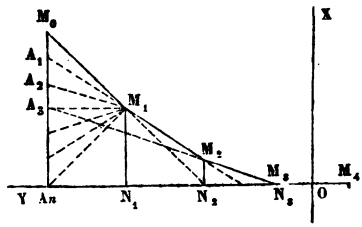
Ce que nous disons pour le polygone funiculaire entier s'applique à une portion quelconque de ce polygone. Il en résulte que les diagonales du polygone des forces qui joignent le sommet (T_1, T_n) aux sommets successifs $(P_1, P_2), (P_2, P_3), \ldots, (P_{n-2}, P_{n-1})$, sont parallèles aux cordons M_1M_2, $M_2M_3, \ldots, M_{n-2}M_{n-1}$ et proportionnelles à leurs tensions $T_2, T_3, \ldots, T_{n-1}$.

6. *Ponts suspendus.* — Appliquons ce théorème au polygone formé par chacune des chaînes d'un pont suspendu. Considérons la portion de la chaîne qui est com-

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1731, p. 69.

prise entre deux sommets M_0, M_n, situés à la même hauteur, mais d'ailleurs quelconques, et faisons abstraction du poids de la chaîne. Les forces P sont toutes verticales; par suite, le polygone est plan; ces forces agissent à égales distances; de plus, elles sont égales entre elles, sinon le tablier tendrait à se courber.

Fig. 24.



D'après cela, *portons sur une droite verticale* $M_0 A_n$ *des longueurs égales* $M_0 A_1$, $A_1 A_2$, *etc., en même nombre que les côtés du polygone considéré; des extrémités* M_0, A_n *de l'ensemble de ces longueurs, menons deux parallèles aux côtés extrêmes, et joignons l'intersection* M_1 *de ces deux lignes aux points de division* A_1, A_2, *etc. Les lignes* $M_0 M_1$, $A_1 M_1$, $A_2 M_1$, *etc., seront parallèles aux chaînons successifs, proportionnelles à leurs tensions, et aussi proportionnelles à leurs longueurs* (*).

Quand on se propose de construire un pont suspendu, on ne se donne pas *à priori* l'angle de l'un des chaînons $M_0 M_1$ avec la verticale; mais plutôt on choisit convenablement la hauteur de l'extrémité M_0 au-dessus du chaînon horizontal $M_3 M_4$. Dans ce cas, pour trouver la direction du chaînon $M_0 M_1$, on observe que ce chaînon et le chaînon horizontal supportent en définitive la moitié d'une portion du tablier dont les extrémités dépassent de quantités égales les projections des sommets M_1, M_3; d'où il suit que les directions $M_0 M_1$, $M_4 M_3$ doivent se couper sur la verticale du centre de gravité de cette portion du

(*) Lamé et Clapeyron, *Journal des voies de communication;* Saint-Pétersbourg, 1827, n° 6.

tablier, c'est-à-dire à égale distance des verticales des sommets M_1, M_3. Dès lors, ces verticales étant connues, on a deux points de la direction cherchée M_0M_1. Pour tracer le polygone, il ne reste plus qu'à placer bout à bout, à la suite de la ligne M_0M_1, des droites égales et parallèles aux obliques A_1M_1, A_2M_1, etc.

Soient a la longueur d'un chaînon en projection horizontale, b la longueur M_0A_1 ou la différence entre les projections verticales de deux chaînons consécutifs, et O le milieu du chaînon horizontal. Prenons la verticale OX pour axe des x et l'horizontale OA_n pour axe des y.

Les coordonnées du point M_3 sont

$$x = 0, \quad y = \frac{a}{2};$$

celles du point M_2 sont

$$x = b, \quad y = \frac{a}{2} + a;$$

celles du point M_1,

$$x = b + 2b, \quad y = \frac{a}{2} + 2a;$$

celles du point M_0,

$$x = b + 2b + 3b, \quad y = \frac{a}{2} + 3a;$$

et généralement celles du $n^{ième}$ sommet à partir du chaînon horizontal sont

$$x = [1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)]b, \quad y = \frac{2n-1}{2}a.$$

Éliminant n entre ces deux équations, il vient

$$y^2 = \frac{2a^2}{b}x + \frac{a^2}{4}.$$

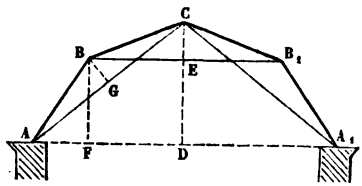
C'est l'équation d'une parabole.

Les sommets du polygone formé par les chaînes sont donc sur une même parabole dont l'axe est vertical et dont le paramètre est égal à $\frac{a^2}{b}$.

On peut observer que tous les chaînons sont tangents en leur point milieu à une même parabole égale à la première. (*Voir* chap. V, sect. II, prob. 10.)

7. *Quatre barres* AB, BC, CB_1, B_1A_1 *sont articulées entre elles aux points* B, C, B_1 *situés dans le plan vertical de la figure. De plus, elles sont reliées par les tirants* AC, BB_1, CA_1; *et tout le système repose par les extrémités* A, A_1 *sur un plan horizontal. Les pièces* AB *et* BC *ont respectivement les poids* P *et* Q *également répartis sur leur longueur; tout est symétrique de part et d'autre de la verticale* CD; *on néglige le poids des tirants.*

Fig. 25.



Calculer les tensions m, n des tirants AC, BB_1 *et les pressions p et q qui s'exercent aux articulations* B *et* C.

Soit BG une perpendiculaire sur AC, et x l'inclinaison de la pression p sur l'horizontale.

On trouve

$$m = \frac{(P + 2Q)\,AF}{2BG}, \quad q = n = \frac{2m\,BG + Q.FD}{2CE},$$

$$p \cos x = m\frac{AD}{AC}, \quad p \sin x = Q + m\frac{CD}{AC}.$$

8. *Une tige horizontale* ADB *porte un poids* Q *à son extrémité* B, *et est soutenue par une seconde tige* CD; *les extrémités* A *et* C *sont fixées sur une même verticale,*

et sont munies de charnières, ainsi que le point de jonction D. *Déterminer la pression exercée à l'extrémité* C *de la seconde tige.* On négligera le poids des deux tiges.

Soient H la composante horizontale de la pression cherchée, et V la composante verticale.

On trouve

$$H = Q\frac{AB}{AC}, \quad V = Q\frac{AB}{AD},$$

et, par conséquent, la pression totale est

$$Q.AB\left(\frac{1}{\overline{AC}^2} + \frac{1}{\overline{AD}^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

9. *Deux barres égales et homogènes sont réunies par une charnière; on place le système sur un cylindre horizontal, de telle sorte que les deux barres forment un angle circonscrit à la section droite du cylindre. Quel est l'angle des deux barres dans la position d'équilibre?*

Soient $2a$ la longueur de chaque barre, r le rayon du cylindre, et 2θ l'angle des deux barres.

L'angle θ est déterminé par l'équation

$$r\cos\theta = a\sin^3\theta.$$

10. *Un quadrilatère, formé de quatre tiges assemblées à leurs extrémités par des charnières, doit avoir deux côtés parallèles, si l'on veut qu'il ne se déforme pas quand on tend des fils entre les milieux des côtés opposés.*

CHAPITRE V.

ÉQUILIBRE D'UN FIL FLEXIBLE.

Galilée (*) chercha le premier à déterminer la forme qu'affecte un fil flexible et pesant, lorsqu'il est soutenu par ses extrémités. Il crut pouvoir annoncer que la courbe est une parabole; c'est qu'en effet, dans le voisinage du point le plus bas, la courbure du fil ressemble à celle d'une parabole. La méprise de Galilée ne tarda pas à être signalée. Joachim Jungius (**) fit d'abord des expériences qui mirent en relief l'erreur du célèbre physicien; puis Jacques Bernoulli (***) traita la question par l'analyse avec un entier succès. Ce dernier porta le défi aux géomètres de son temps de résoudre le problème de la *chaînette;* c'est ainsi qu'il nommait la courbe décrite par le fil. Trois des concurrents trouvèrent la solution : ce furent Jean Bernoulli, Leibnitz et Huyghens; Jacques Bernoulli prouva de son côté qu'il avait lui-même résolu la question. Ces solutions furent données sans calculs dans les *Acta eruditorum* pour l'année 1691 (juin, p. 273-282). La première démonstration ne parut que six ans plus tard dans les *Philosophical Transactions;* elle est de David Gregory.

Après avoir discuté la forme de la chaînette décrite par un fil homogène et d'épaisseur constante, Jacques Bernoulli (****) dirigea ses efforts sur des cas plus compli-

(*) *Mechanica,* dialogo II, p. 131.
(**) *Geometrica empirica.*
(***) *Acta eruditorum;* Lips., 1690; mai, p. 217. — *Opera,* t. I, p. 424.
(****) *Acta eruditorum,* Lips., 1691; juin, p. 289. — *Opera,* t. I, p. 449.

qués. Il se donna à volonté la loi suivant laquelle varie l'épaisseur d'un fil, et détermina la courbe décrite par ce fil; réciproquement, il se donna la courbe, et chercha la loi suivant laquelle varie l'épaisseur; puis il considéra un fil pesant et extensible, en admettant la loi expérimentale de Hooke (*), savoir, que la dilatation linéaire d'un fil est proportionnelle à sa tension. Toutefois Jacques Bernoulli ne publia pas les démonstrations des résultats auxquels il parvint; son frère Jean (**) dut y suppléer.

Quant aux conditions générales de l'équilibre d'un fil flexible, Herman (***) fut le premier à s'en occuper; mais ses travaux ne sont point exempts d'erreurs. Plus tard, Jean Bernoulli (****) traita cette question avec sa supériorité habituelle; il s'attacha principalement à considérer un fil soumis à des forces qui sont dirigées vers un centre fixe.

SECTION I.

CONDITIONS GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE D'UN FIL FLEXIBLE ET INEXTENSIBLE.

Soient APpB un fil parfaitement flexible, x, y, z les coordonnées du point P, $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ les coordonnées du point infiniment rapproché p, s la longueur du fil AP comptée à partir d'un point fixe A, δs la longueur de l'élément Pp.

Concevons que l'on isole l'élément Pp, en supprimant les portions de fil AP, Bp. Alors, pour maintenir l'élément Pp en équilibre, il faudra appliquer en P une force

(*) *De potentia restitutiva.*

(**) *Lectiones mathemat. in usum Hospitalii. Opera*, t. III, lect. XXXVIII, XXXIX, XL, XLI.

(***) *Phoronomia*, lib. I, cap. III, et Appendice, § V.

(****) *Opera*, t. IV, p. 234.

que nous désignerons par t, et en p une force représentée par $t + \delta t$. Ces forces sont les tensions du fil aux points considérés.

La première tension a pour composantes suivant les axes

$$-t\frac{dx}{ds}, \quad -t\frac{dy}{ds}, \quad -t\frac{dz}{ds},$$

et les composantes de la seconde sont

$$t\frac{dx}{ds} + \frac{d.}{ds}\left(t\frac{dx}{ds}\right)\delta s, \quad t\frac{dy}{ds} + \frac{d.}{ds}\left(t\frac{dy}{ds}\right)\delta s,$$

$$t\frac{dz}{ds} + \frac{d.}{ds}\left(t\frac{dz}{ds}\right)\delta s.$$

Soient X, Y, Z les composantes parallèles aux axes de la force rapportée à l'unité de masse, qui est directement appliquée à la molécule P. Nommons m la masse du fil au point P rapportée à l'unité de longueur, ou, ce qui est la même chose, le produit de la section du fil en P par la densité qui existe en ce point.

Les composantes des forces directement appliquées à l'élément Pp seront

$$\mathrm{X}m\delta s, \quad \mathrm{Y}m\delta s, \quad \mathrm{Z}m\delta s.$$

Dès lors nous aurons trois équations d'équilibre, si nous écrivons que la somme des projections sur chaque axe de toutes les forces qui sollicitent l'élément Pp est nulle. Il vient

$$(a) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d.}{ds}\left(t\frac{dx}{ds}\right) + m\mathrm{X} = 0,\\ &\frac{d.}{ds}\left(t\frac{dy}{ds}\right) + m\mathrm{Y} = 0,\\ &\frac{d.}{ds}\left(t\frac{dz}{ds}\right) + m\mathrm{Z} = 0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on élimine t, on trouve

$$dx \int mY\,ds = dy \int mX\,ds,$$

$$dy \int mZ\,ds = dz \int mY\,ds,$$

$$dz \int mX\,ds = dx \int mZ\,ds.$$

Deux quelconques de ces dernières équations représentent la courbe décrite par le fil.

Corollaire I. — Intégrons les équations (a) par rapport à s, et ajoutons les carrés des résultats, en ayant égard à la relation

$$(b) \qquad \frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} = 1;$$

nous trouvons

$$t^2 = \left(\int mX\,ds\right)^2 + \left(\int mY\,ds\right)^2 + \left(\int mZ\,ds\right)^2.$$

Cette formule nous fait connaître la tension.

On peut encore obtenir la tension sous une autre forme. En effet, multiplions les équations (a) respectivement par dx, dy, dz, et ajoutons les produits, en observant que l'équation (b) nous donne par différentiation

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} = 0;$$

il vient

$$t = -\int m(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + \text{const.}$$

Ces deux formules ont été données pour la première fois par Fuss dans les *Mémoires de Saint-Pétersbourg* (1794, p. 150, 151).

Corollaire II. — Quand le fil entier sera situé dans un

même plan, nous prendrons ce plan pour celui des xy, et la courbe sera représentée par la seule équation

$$dx \int m\,\mathrm{Y}\,ds = dy \int m\,\mathrm{X}\,ds.$$

SECTION II.

FIL SOLLICITÉ PAR DES FORCES PARALLÈLES.

1. *Un fil flexible et pesant est attaché par ses extrémités en deux points fixes; la masse m rapportée à l'unité de longueur varie d'un point à un autre, suivant une loi donnée. Trouver l'équation de la courbe formée par le fil. Réciproquement, la courbe étant donnée, déterminer la loi suivant laquelle varie la masse.*

Le fil sera tout entier situé dans un plan vertical.

Prenons l'axe des x horizontal, et l'axe des y vertical dirigé de bas en haut; conservons pour le reste la notation employée dans la section précédente.

Ici

$$\mathrm{X} = 0, \quad \mathrm{Y} = -g,$$

et les équations (a) se réduisent aux suivantes :

$$\frac{d}{ds}\left(t\frac{dx}{ds}\right) = 0,$$

$$(1) \qquad \frac{d}{ds}\left(t\frac{dy}{ds}\right) = mg.$$

La première équation donne

$$(2) \qquad t\frac{dx}{ds} = \text{const.} = \mathrm{C}.$$

Or, au point le plus bas de la courbe, on a $\frac{dx}{ds} = 1$; par conséquent, si l'on nomme τ la tension du fil en ce point,

$$\mathrm{C} = \tau,$$

et l'équation (2) devient

$$t\frac{dx}{ds} = \tau. \tag{3}$$

Éliminons t entre cette dernière formule et l'équation (1); nous obtenons

$$\tau\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right) = mg,$$

$$\tau\frac{dy}{dx} = \int mg\,ds.$$

Au point le plus bas de la courbe, $\frac{dy}{dx} = 0$; par conséquent, si l'on nomme α la valeur de s correspondante à ce point, on aura

$$\tau\frac{dy}{dx} = g\int_{\alpha}^{s} m\,ds.$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe. Pour l'intégrer, il faut connaître l'expression de m en x, y, s.

Différentions cette dernière formule; il vient

$$m = \frac{\tau}{g}\,\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{ds}{dx}}. \tag{4}$$

Cette équation fera connaître la masse m, lorsqu'on aura l'équation de la courbe.

La tension est

$$t = \tau\frac{ds}{dx}.$$

JEAN BERNOULLI, *Lectiones mathematicæ*, lect. 38, 39, 40; *Opera*, t. III.

2. *Un fil flexible et pesant est attaché par ses extrémités en deux points fixes; la masse rapportée à l'unité*

de longueur est en chaque point inversement proportionnelle à la racine carrée de l'arc qui sépare ce point du point le plus bas. Déterminer la courbe formée par le fil.

Conservons la notation du problème précédent, et comptons les arcs à partir du point le plus bas, lequel sera pris pour origine des coordonnées.

Soit μ la masse correspondante à l'extrémité de l'arc c. On a

$$m = \mu\sqrt{\frac{c}{s}},$$

$$\tau\frac{dy}{dx} = g\mu\sqrt{c}\int\frac{ds}{\sqrt{s}} = 2g\mu\sqrt{cs}.$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{2g\mu\sqrt{c}}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}.$$

Alors

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{s}{\beta}}, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{s}{\beta};$$

différentiant,

$$\beta\frac{d.}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}},$$

$$\frac{\beta\frac{d.}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}} = 1, \quad \text{d'où} \quad 2\beta\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = x + C.$$

C est une constante que l'on détermine par la condition que l'on ait à la fois

$$x = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

Il vient

$$(1) \qquad 2\beta\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = x + 2\beta,$$

ou

$$2\beta\, dy = [(x+2\beta)^2 - 4\beta^2]^{\frac{1}{2}}\, dx,$$

et par intégration,

$$C' + 2\beta y = \frac{1}{2}(x+2\beta)\sqrt{x^2+4\beta x}$$
$$- 2\beta^2 \log\left[x + 2\beta + (x^2+4\beta x)^{\frac{1}{2}}\right].$$

On détermine la constante C′ par la condition que la courbe passe à l'origine; cela donne

$$C' = -2\beta^2 \log(2\beta),$$

d'où

$$2\beta y = \frac{1}{2}(x+2\beta)\sqrt{x^2+4\beta x} - 2\beta^2 \log\frac{x+2\beta+\sqrt{x^2+4\beta x}}{2\beta}.$$

Telle est l'équation de la courbe.

Corollaire. — L'équation (1) donne

$$\frac{ds}{dx} = \frac{x+2\beta}{2\beta},$$

par conséquent la tension a pour valeur

$$t = \tau\frac{ds}{dx} = \frac{\tau}{2\beta}(x+2\beta).$$

Jean Bernoulli, *Lect. mathem.*; *Opera*, t. III, p. 497.

3. *Un fil flexible, dont les extrémités sont fixées sur une même ligne horizontale, prend la forme d'une demi-circonférence, sous l'influence de la gravité. Déterminer la loi suivant laquelle la masse du fil rapportée à l'unité de longueur varie d'un point à un autre.*

Conservons la notation du problème précédent, et soit a le rayon de la circonférence.

L'équation de cette courbe est

$$x^2 = 2ay - y^2.$$

On en tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

et, d'après le problème I, équation (4),

$$m = \frac{\tau}{g} \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\tau}{g} \frac{a}{a^2 - x^2} = \frac{\tau a}{g(a - y)^2}.$$

Ainsi la masse varie en raison inverse du carré de la distance au diamètre horizontal.

Corollaire. — La tension est

$$t = \tau \frac{ds}{dx} = \frac{\tau a}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\tau a}{a - y}.$$

Jean Bernoulli, *Opera*, t. III, p. 502.

4. *Un fil homogène, d'épaisseur constante, est attaché par ses extrémités en deux points situés sur une même ligne horizontale; la tension aux deux extrémités est égale au poids de tout le fil. Déterminer la longueur du fil, la distance verticale des deux extrémités au point le plus bas de la courbe décrite, et la direction des tangentes extrêmes.*

Prenons l'axe des y vertical, à égale distance des deux points d'attache, et l'origine à une telle hauteur, que la tension, au point le plus bas de la courbe, soit mesurée par le poids d'une longueur de fil égale à l'ordonnée de ce

point. Soient m la masse du fil rapportée à l'unité de longueur, $2a$ la distance des extrémités, c l'ordonnée du point le plus bas, d la distance verticale de ce point à la droite qui joint les deux extrémités, l la longueur du fil, et φ l'inclinaison des tangentes extrêmes sur l'axe des x.

L'équation de la courbe est, comme l'on sait,

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

On en tire

$$l = c\left(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}\right).$$

Il nous faut éliminer l'inconnue c de cette expression.

Au point (x, y) la tension est

$$mgy = \frac{1}{2}mcg\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

A l'extrémité, cette valeur devient

$$\frac{1}{2}mcg\left(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}\right).$$

Or, par hypothèse, cette tension doit être égale à mgl; donc

$$\frac{1}{2}mcg\left(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}\right) = mcg\left(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}\right),$$

et, par suite,

$$e^{\frac{2a}{c}} = 3, \quad \frac{a}{c} = \frac{1}{2}\log 3,$$

$$l = \frac{2a}{\log 3}\left(3^{\frac{1}{2}} - 3^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{4a}{\sqrt{3}\log 3}.$$

Telle est la longueur du fil.

L'ordonnée des points d'attache est

$$\frac{1}{2}c\left(e^{\frac{a}{c}}+e^{-\frac{a}{c}}\right).$$

Cette ordonnée est aussi représentée par $c+d$; donc

$$d=\frac{1}{2}c\left(e^{\frac{a}{c}}+e^{-\frac{a}{c}}-2\right)=\frac{2a}{\log 3}\,\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Telle est la distance du point le plus bas à la droite qui joint les extrémités.

On a généralement

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}-e^{-\frac{x}{c}}\right);$$

à l'extrémité du fil,

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tang}\varphi=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{c}}-e^{-\frac{a}{c}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

d'où

$$\varphi=\frac{\pi}{6}.$$

5. *Un fil homogène, d'épaisseur constante, repose en équilibre sur deux chevilles très-minces, situées à la même hauteur, et qui n'exercent aucun frottement. On connaît la distance* $2a$ *des deux supports, et l'on demande la moindre longueur du fil qui puisse permettre l'équilibre; on propose encore de déterminer, pour une longueur donnée du fil, la courbe qu'il affecte, et la pression* P *qu'il exerce sur chacun des deux supports.*

Nommons L la longueur totale du fil, T sa tension aux points d'appui, et conservons pour le reste la notation du problème précédent; l sera la longueur du fil courbé en chaînette.

D'après ce qui précède, l'équation de cette courbe est

$$(1) \qquad y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

où c représente l'ordonnée du point le plus bas, et mcg la tension en ce point.

Nous avons aussi (probl. 4)

$$(2) \qquad T = \frac{1}{2} mcg\left(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}\right);$$

d'ailleurs, il est clair que, en vertu des données,

$$T = \frac{1}{2} mg(L - l);$$

par conséquent,

$$L - l = c\left(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}\right).$$

Si, dans cette équation, on remplace l par sa valeur

$$c\left(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}\right),$$

il vient

$$(3) \qquad L = 2ce^{\frac{a}{c}};$$

d'où l'on voit que la plus petite valeur que L puisse admettre correspond à la racine positive de l'équation

$$\frac{d.}{dc}\left(ce^{\frac{a}{c}}\right) = 0,$$

laquelle est

$$c = a.$$

Ainsi la plus petite longueur du fil est

$$L = 2ae.$$

Supposons maintenant que la longueur L soit donnée, et supérieure à $2ae$.

L'équation (3) aura deux racines positives, c_1 et c_2, l'une supérieure à a, l'autre inférieure; la plus grande correspond à un état d'équilibre stable, et la plus petite à un état d'équilibre instable. Considérons l'une d'elles c_1. L'équation de la courbe sera

$$y = \frac{c_1}{2}\left(e^{\frac{x}{c_1}} + e^{-\frac{x}{c_1}}\right),$$

et nous aurons

$$P = 2T\cos.\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

où (probl. 4)

$$\tang\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{c_1}} - e^{-\frac{a}{c_1}}\right),$$

$$\cos.\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sqrt{\frac{1 + \sin\varphi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{e^{\frac{a}{c_1}} - e^{-\frac{a}{c_1}}}{e^{\frac{a}{c_1}} + e^{-\frac{a}{c_1}}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent,

$$P = mc_1 g\left(1 + e^{\frac{2a}{c_1}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ce problème s'applique à une pièce d'étoffe homogène, d'une largeur constante, que l'on voudrait soutenir sur deux bâtons fixés horizontalement à la même hauteur, dans des directions parallèles.

Annales de Gergonne, t. XIX, p. 339.

6. *Un fil pesant et homogène est attaché par l'une de ses extrémités à un point fixe situé au-dessus d'un plan incliné, tandis que l'autre extrémité et une portion du fil reposent sur ce plan. On connaît la longueur totale du*

fil, l'inclinaison du plan, celle de la tangente à la courbe au point d'attache, et l'on demande la longueur de la portion du fil qui repose sur le plan.

Soient ABC le fil dont il s'agit, A le point d'attache, BC la partie qui repose sur le plan incliné, l la longueur totale du fil, l' celle de la partie qui repose sur le plan, α l'inclinaison de ce plan sur l'horizon, et φ celle de la tangente à la courbe à l'extrémité A.

L'arc AB appartient à une certaine chaînette; supposons que cette chaînette soit prolongée jusqu'en un point A′ situé à la même hauteur que le point A, et qu'elle soit décrite par un fil semblable à celui que nous considérons.

Nous disposons les axes, relativement à cette chaînette auxiliaire, comme dans le problème 4, et nous conservons la même notation; de plus, nous nommons L le sommet de cette chaînette, et nous comptons les arcs s à partir de ce point.

D'après les formules

$$t = mcg\frac{ds}{dx},$$

$$s = \frac{1}{2}c\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right) = c\frac{dy}{dx},$$

la tension au point B est $\frac{mcg}{\cos\alpha}$, et les arcs LB, LA sont respectivement égaux à $c \operatorname{tang}\alpha$, $c \operatorname{tang}\varphi$.

Ceci posé, la tension au point B est nécessairement égale au poids de la portion de fil BC qui repose sur le plan, estimé suivant la longueur de ce plan.

On a donc

$$mgl' \sin\alpha = \frac{mcg}{\cos\alpha},$$

$$c = l' \sin\alpha \cos\alpha,$$

d'où

$$l - l' = \text{arc LA} - \text{arc LB} = c\,(\text{tang}\,\varphi - \text{tang}\,\alpha)$$
$$= l' \sin\alpha \cos\alpha\,(\text{tang}\,\varphi - \text{tang}\,\alpha),$$

$$l = l' \frac{\cos\alpha \cos(\varphi - \alpha)}{\cos\varphi}, \quad l' = \frac{l \cos\varphi}{\cos\alpha \cos(\varphi - \alpha)}.$$

7. *Une chaîne flexible, homogène, mais d'inégale épaisseur, est suspendue par ses extrémités. Déterminer la loi suivant laquelle doit varier l'épaisseur en chaque point, et la courbe que doit affecter la chaîne, pour que la tension varie d'un point à un autre proportionnellement à l'épaisseur, ou que la chaîne présente partout égale chance à la rupture.*

Conservons les notations du problème 1, et nommons ω le rapport constant qui existe entre la masse m rapportée à l'unité de longueur et la tension t.

Les formules (3) et (4) du problème 1 nous donnent

$$m = t\omega = \omega\tau \frac{ds}{dx} = \frac{\tau}{g} \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{ds}{dx}},$$

$$\omega g \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) = \frac{d^2y}{dx^2},$$

ou

$$\frac{dp}{1 + p^2} = \omega g\, dx,$$

si l'on pose, pour abréger, $\frac{dy}{dx} = p$.

L'intégrale est

$$\omega g x = \text{arc tang}\, p,$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \text{tang}.\,\omega g x;$$

nous n'ajoutons pas de constante, parce que nous supposons l'origine située au point le plus bas où $\frac{dy}{dx} = 0$.

Si l'on intègre la dernière équation, il vient

$$y = -\frac{1}{\omega g}\log(\cos.\omega g x),$$

$$e^{\omega g y}\cos.\omega g x = 1;$$

nous n'ajoutons pas de constante par la même raison que plus haut.

Cette dernière équation est celle de la courbe décrite par la chaîne. On voit qu'elle est composée d'une infinité de branches comprises entre deux asymptotes verticales. Nous n'avons à considérer que la branche comprise entre les asymptotes

$$x = \frac{\pi}{2\omega g}, \quad x = -\frac{\pi}{2\omega g}.$$

Portons la valeur de p dans l'équation

$$m = t\omega = \omega\tau\frac{ds}{dx};$$

il vient

$$m = t\omega = \omega\tau\,\text{séc}.\omega g x,$$

ce qui fait connaître la tension et l'épaisseur de la chaîne en un point quelconque.

Nous avons encore

$$ds = \frac{dx}{\cos.\omega g x};$$

par conséquent, la longueur d'un arc de la chaîne compté à partir du point le plus bas jusqu'au point (x, y) est

$$s = \frac{1}{2\omega g}\log\frac{1+\sin.\omega g x}{1-\sin.\omega g x},$$

et le poids de cet arc a pour valeur

$$\int mg\,ds = \tau\int\frac{d.\omega g x}{\cos^2.\omega g x} = \tau\,\text{tang}.\omega g x.$$

Le rayon de courbure ρ est donné par la formule

$$\rho = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{dp}{dx}}.$$

Puisque $\frac{dp}{dx} = \omega g \left(\frac{ds}{dx}\right)^2$,

$$\rho = \frac{1}{\omega g}\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\omega g}\,\text{séc.}\,\omega g x = \frac{t}{\tau \omega g} = \frac{mg}{\tau \omega^2 g^2};$$

d'où l'on voit qu'en chaque point de la chaîne le rayon de courbure est proportionnel soit à la tension, soit au poids de l'élément. On voit aussi qu'au point le plus bas ce rayon est égal à $\frac{1}{\omega g}$.

FINCK et BOBILLIER, *Annales de Gergonne*, t. XVII, p. 61.

8. *Un fil pesant est attaché par ses deux extrémités en deux points fixes. La masse du fil rapportée à l'unité de longueur est proportionnelle, en chaque point, au cosinus de l'angle que la tangente à la courbe fait avec l'horizon. Trouver l'équation de la courbe.*

Soient $m = \beta \frac{dx}{ds}$ la masse correspondante au point (x, y) et τ la tension au sommet de la courbe.

La courbe est la parabole

$$x^2 = \frac{2\tau}{\beta g} y.$$

JACQUES BERNOULLI, *Acta erudit.*; Lips., Jun., *Opera*, t. I, p. 449. — JEAN BERNOULLI, *Opera*, t. III, p. 501.

9. *Déterminer la courbe décrite par un fil pesant, lorsque la masse rapportée à l'unité de longueur est proportionnelle à* $y^n \sin\varphi$, *n étant positif, et* φ *désignant l'inclinaison de la tangente sur l'horizon.*

Si l'on pose

$$m = \beta y^n \sin \varphi,$$

et si l'on choisit une origine telle, que l'axe des x passe au sommet inférieur de la courbe et que $y = \infty$ pour $x = 0$, on trouve l'équation

$$xy^n = -\frac{(n+1)\tau}{ng\beta}.$$

Lorsque n est égal à l'unité, la courbe est une hyperbole.

JACQUES BERNOULLI, *Acta erudit.*; Lips., Jun., *Opera*, t. I, p. 449. — JEAN BERNOULLI, *Opera*, t. III, p. 501.

10. *Un fil pesant décrit une parabole du second degré dont l'axe est vertical. Déterminer la loi suivant laquelle varie la masse rapportée à l'unité de longueur.*

Soit

$$x^2 = 2ay$$

l'équation de la parabole.

On trouve, par les formules générales,

$$m = \frac{\tau}{g\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Autrement : supposons le fil solidifié entre deux points A et B choisis à volonté. La portion de fil AB est en équilibre sous l'action de son poids et des tensions qui s'exercent aux extrémités ; ces trois forces se coupent donc en un même point. Les deux tensions sont dirigées suivant deux tangentes à une parabole ; elles se coupent sur le diamètre qui passe par le milieu de la corde des contacts ; par conséquent, le centre de gravité de la portion de fil AB se trouve sur ce même diamètre vertical ; c'est-à-dire qu'une portion quelconque du fil, considérée en projection horizontale, a son centre de gravité au milieu de sa longueur. Ceci exige que le fil considéré en projection horizontale soit homogène. En d'autres termes, la masse

du fil rapportée à l'unité de longueur varie en raison inverse du cosinus de son inclinaison sur l'horizontale. C'est ce qu'exprime la formule trouvée précédemment.

JEAN BERNOULLI, *Opera*, t. III, p. 504.

11. *Un fil pesant est attaché par ses extrémités en deux points fixes situés sur une même ligne horizontale, et la courbe décrite est une cycloïde. Déterminer, en un point donné, la masse du fil rapportée à l'unité de longueur, et trouver le poids de l'arc compris entre le sommet de la cycloïde et le point donné.*

Soient

$$x = a(\omega + \sin\omega),$$
$$y = a(1 - \cos\omega)$$

les équations de la cycloïde, et P le poids cherché.

On trouve

$$m = \tau \frac{\sec^3 \frac{1}{2}\omega}{4ag}, \quad P = \tau \operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega.$$

12. *Un fil pesant, de longueur donnée, est attaché par son extrémité en un point fixe* A, *situé sur un plan horizontal et dépoli, tandis que l'autre extrémité est attachée à un poids posé sur le plan. Entre le poids et le point* A *est une fente étroite qui permet au fil de pendre librement. Trouver la plus grande distance du poids au point* A *qui soit compatible avec l'équilibre du système.*

Soient μ le coefficient de frottement du poids sur le plan, n le double du rapport entre le poids donné et celui du fil, l la longueur du fil et $2a$ la distance cherchée.

On trouve

$$2a = \mu l(n+1).\log \frac{1 + \sqrt{\mu^2(n+1)^2 + 1}}{\mu(n+1)}.$$

13. *Un fil pesant est attaché par ses extrémités a deux clous situés sur une même ligne horizontale. On connaît la distance de ces deux supports. Quelle doit être la longueur du fil, pour que la pression exercée sur chacun des deux supports soit un minimum?*

Soient $2a$ la distance des supports, l la longueur du fil et

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

l'équation de la chaînette.

Si l'on détermine c par l'équation

$$(1) \qquad e^{\frac{2a}{c}} = \frac{\frac{a}{c}+1}{\frac{a}{c}-1},$$

on a

$$l = c\left(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}\right).$$

Prenons, par exemple, $2a = 10^{m}$; nous trouvons

$$c = 4^{m},168\ldots \quad \text{et} \quad l = 12^{m},578\ldots.$$

Diarian Repository, p. 644.

L'équation (1) peut s'écrire

$$a\left(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}\right) = c\left(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}\right).$$

Il s'ensuit que le produit de la longueur du fil par l'écartement des points d'attache est égal à quatre fois le produit des deux longueurs de fil dont les poids seraient respectivement égaux aux tensions de l'extrémité et du point le plus bas.

14. *Un fil pesant, suspendu par ses extrémités, décrit une courbe représentée par l'équation*

$$a^3 y = x^4.$$

Trouver le point du fil auquel la masse rapportée à l'unité de longueur est un maximum, et déterminer la valeur de ce maximum.

Les coordonnées du point cherché sont

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{a}{4},$$

et la masse correspondante est égale à $\frac{2\sqrt{3}\tau}{ag}$.

Diarian Repository, p. 435.

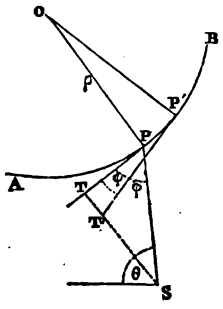
15. *On suppose une chaîne pesante, homogène, dont les bouts sont fixés aux extrémités* A, B *d'une tringle horizontale. L'un des chaînons,* C, *est engagé sur la tringle et peut s'y mouvoir sans frottement. Démontrer que dans l'état d'équilibre le plus petit des deux festons* AC, CB, *formés par la chaîne, est égal et superposable à une portion du plus grand.*

SECTION III.

FIL SOLLICITÉ PAR UNE FORCE CENTRALE.

1. *Trouver l'équation de la courbe décrite par un fil flexible, dont toutes les molécules sont attirées vers un centre fixe.*

Fig. 26.



Soient APP'B une portion du fil;

S le centre d'attraction;

PP' un élément infiniment petit du fil;

PT et P'T' les tangentes en P et P';

O le centre de courbure correspondant à l'élément PP';

ρ le rayon de courbure pour le même élément;

r la distance du point P au centre d'attraction;

p la distance ST du centre d'attraction à la tangente au point P;

T la distance PT;

ψ l'angle des deux tangentes PT, P′T′;

φ l'angle SPT;

θ l'angle que forme le rayon SP avec une direction fixe;

s l'arc de la courbe compté dans le sens APP′B;

t la tension du fil au point P;

F la force attractive au même point, rapportée à l'unité de masse;

m la masse du fil rapportée à l'unité de longueur.

Projetons les forces qui sollicitent l'élément PP′, d'abord sur le rayon de courbure PO, puis sur la tangente PT.

Il vient

$$\mathrm{F}m\,ds\sin\varphi = (t + dt)\sin\psi,$$
$$\mathrm{F}m\,ds\cos\varphi = (t + dt)\cos\psi - t.$$

Comme on doit négliger les quantités infiniment petites d'un ordre supérieur au premier, ces équations se réduisent à

$$\mathrm{F}m\,ds\sin\varphi = t\psi,$$
$$\mathrm{F}m\,ds\cos\varphi = dt,$$

ou, d'après les relations $\psi = \frac{ds}{\rho}$ et $\cos\varphi = \frac{dr}{ds}$,

$$(a) \qquad \mathrm{F}m\sin\varphi = \frac{t}{\rho},$$

$$(b) \qquad \mathrm{F}m\,dr = dt.$$

Si l'on considère le triangle OPP′ et le triangle semblable formé par TT′ et les deux tangentes PT, P′T′, on voit que

$$\frac{\mathrm{T}}{\rho} = -\frac{dp}{ds};$$

d'ailleurs

$$\cos\varphi = \frac{T}{r} = \frac{dr}{ds}.$$

Divisant ces deux équations l'une par l'autre, on trouve

$$\frac{r}{\rho} = -\frac{dp}{dr}.$$

On a encore

$$\sin\varphi = \frac{p}{r}.$$

Entre ces deux dernières relations et l'équation (a), éliminons ρ et $\sin\varphi$; nous obtenons

$$F\,m\,dr + \frac{dp}{p}\,t = 0,$$

et si nous retranchons l'équation (b),

$$\frac{dp}{p} + \frac{dt}{t} = 0.$$

L'intégrale est

$$\log(tp) = \text{const.},$$
$$tp = \text{const.} = C;$$

elle nous montre que le moment de la tension par rapport au centre fixe est le même en chaque point.

On tire de cette formule, en la rapprochant de l'équation (b),

$$\frac{C}{p} = \int F\,m\,dr.$$

Cette dernière formule peut être considérée comme l'équation de la courbe rapportée aux coordonnées p et r; mais il sera plus commode de prendre les coordonnées polaires r et θ, qui sont liées aux précédentes par la relation

$$p = \frac{r^2\,d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2\,d\theta^2}}.$$

Il vient

$$tr^2 d\theta = C\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2},$$

ou

$$(c) \qquad d\theta = \frac{C dr}{r\sqrt{t^2 r^2 - C^2}}.$$

C'est l'équation de la courbe en coordonnées polaires, telle qu'elle a été donnée par Jean Bernoulli (*).

La formule (b) fera connaître la tension par une simple quadrature, si l'on a soin d'exprimer F et m en fonction de r.

On remarquera de nombreuses analogies entre ces formules et celles qui conviennent au mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe; la tension joue le rôle de la vitesse.

Le cas d'une force centrale répulsive n'a pas besoin d'être traité d'une manière spéciale, il suffit de changer le signe de F dans les formules qui précèdent.

2. *Un fil homogène et sans poids, retenu par ses extrémités, est attiré vers un point fixe par une force qui est inversement proportionnelle au carré de la distance. Déterminer la courbe décrite par le fil.*

Considérons le point de la courbe où la tangente est perpendiculaire à la force d'attraction. Soient τ la tension du fil en ce point, c la distance du point au centre d'attraction, et k la force attractive exercée au même point, rapportée à l'unité de masse.

Conservons pour le reste la notation du problème précédent.

D'après l'équation (b), nous avons

$$t = \int F m dr = \int k \frac{c^2}{r^2} m dr = -\frac{mkc^2}{r} + \text{const.}$$

(*) *Opera*, t. IV, p. 235.

Puisque t doit se réduire à τ, lorsque $r = c$, la constante est égale à $\tau + mkc$, et, par conséquent,

$$t = \tau + mkc - \frac{mkc^2}{r}.$$

Substituons cette valeur dans l'équation (c); il vient

$$d\theta = \frac{C\,dr}{r\left[\left(\tau + mkc - \frac{mkc^2}{r}\right)^2 r^2 - C^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Or, lorsque $\frac{dr}{d\theta} = 0$, nous devons avoir $r = c$; il en résulte $C = c\tau$, en sorte que, si nous posons

$$\frac{\tau}{mkc} = n,$$

l'équation de la courbe se réduit à celle-ci,

$$d\theta = \frac{nc\,dr}{r\left[(n+1)^2 r^2 - 2(n+1)cr + c^2 - n^2c^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Il convient, pour l'intégration, de distinguer trois cas, suivant que l'on a

$$n > 1, \quad n = 1, \quad \text{ou} \quad n < 1.$$

Premier cas. $n > 1$.

L'intégrale est

$$\theta = -\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \arcsin \frac{(n-1)c + r}{nr} + C'.$$

Si l'on compte les angles θ à partir du rayon vecteur qui est égal à c, on a

$$C' = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\frac{(n-1)c+r}{nr} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\theta\right)$$

$$r = \frac{(n-1)c}{n\cos\cdot\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\theta - 1}.$$

Deuxième cas. $n = 1$.

L'intégrale est

$$\theta = \sqrt{\frac{r-c}{r}} + C';$$

si l'on admet que θ est nul lorsque $r = c$, on a

$$r = \frac{c}{1-\theta^2}.$$

Troisième cas. $n < 1$.

L'intégrale est

$$\theta = -\frac{n}{\sqrt{1-n^2}}$$

$$\times \log\left[\frac{\sqrt{(n+1)^2r^2 - 2(n+1)cr + c^2 - n^2c^2} + c\sqrt{1-n^2}}{r} - \sqrt{\frac{1+n}{1-n}}\right] + C';$$

si θ est nul lorsque $r = c$, on a

$$C' = \frac{n}{\sqrt{1-n^2}}\log\left[-n\sqrt{\frac{1+n}{1-n}}\right],$$

d'où

$$e^{\frac{\theta}{n}\sqrt{1-n^2}} + e^{-\frac{\theta}{n}\sqrt{1-n^2}} = \frac{2}{nr}[r-(1-n)c].$$

Les trois courbes que nous venons d'obtenir ont des asymptotes faciles à déterminer. En effet, d'après le problème 1, on a

$$p = \frac{c\tau}{t} = \frac{c\tau}{\tau + mkc - \frac{mkc^2}{r}} = \frac{nc}{n+1-\frac{c}{r}}.$$

Si l'on fait $r = \infty$, il vient

$$p = \frac{nc}{n+1};$$

c'est la distance du centre d'attraction aux asymptotes des trois courbes. Si l'on fait de même $r = \infty$ dans les équations des trois courbes, on trouve, pour la première courbe,

$$\theta = \pm \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{n};$$

pour la seconde courbe,

$$\theta = \pm 1;$$

pour la troisième courbe,

$$\theta = \pm \frac{n}{\sqrt{1 - n^2}} \log \frac{1 + \sqrt{1 - n^2}}{n}.$$

Ces angles sont les inclinaisons respectives des deux asymptotes sur le rayon qui sert d'origine aux angles θ.

JEAN BERNOULLI, *Opera*, t. IV, p. 240.

3. *Un fil homogène et sans poids, retenu par ses extrémités, est soumis à l'action d'une force répulsive, émanée d'un centre fixe, et inversement proportionnelle à la $\mu^{\text{ième}}$ puissance de la distance à ce centre. Déterminer la courbe décrite par le fil.*

Conservons la notation du problème précédent, et admettons qu'au point où la force répulsive est perpendiculaire à l'arc, la tension soit égale à $\frac{mck}{\mu - 1}$.

Nous obtenons l'équation

$$\left(\frac{r}{c}\right)^{\mu-2} = \cos(\mu - 2)\theta.$$

4. *Étant donnée une corde parfaitement flexible et*

homogène, mais d'inégale épaisseur, dont tous les éléments sont soumis à l'action d'une force centrale inversement proportionnelle à la distance, trouver la loi suivant laquelle doit varier l'épaisseur en chaque point et la courbe que doit affecter la corde dans le cas d'équilibre, pour que, dans cet état, la tension varie d'un point à un autre proportionnellement à l'épaisseur, ou que la corde présente partout égale chance à la rupture.

Conservons la notation et les axes du problème 2; de plus, prenons pour unité de force celle qui agit à l'unité de distance, et pour unité de densité celle de la corde, en sorte que la section du fil soit représentée par le même nombre que la masse rapportée à l'unité de longueur. Nommons a le rapport constant qui existe entre la section m et la tension t en chaque point de la corde, dans l'état d'équilibre.

Les formules (b) et (c) du problème 1 nous donnent les équations

$$m = a\tau\left(\frac{r}{c}\right)^{\pm a},$$

$$r^{1\pm a}\cos.(1\pm a)\,\theta = c^{1\pm a},$$

dans lesquelles le signe supérieur répond à une force attractive, et le signe inférieur à une force répulsive.

On voit que la trajectoire peut être, suivant les cas, un cercle, une hyperbole équilatère, une lemniscate, ou quelque autre courbe.

Les deux équations qui précèdent permettent d'évaluer le volume d'un arc, compté à partir de l'axe polaire, en fonction de la section au point où l'on s'arrête.

Soit V ce volume. On trouve

$$V = \frac{ac\tau}{1\pm a}\left[\left(\frac{m}{a\tau}\right)^{\pm 2\frac{1\pm a}{a}} - 1\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ossian Bonnet, *Journal* de M. Liouville, t. IX, p. 97; 1844.

SECTION IV.

FIL PLACÉ SUR UNE COURBE FIXE.

1. *Un fil flexible et pesant est maintenu en équilibre sur une courbe située dans un plan vertical. Déterminer, en un point donné, la tension du fil et la pression exercée sur la courbe.*

Prenons l'axe des x horizontal, et soient :

P le point donné dont les coordonnées sont x, y;

P′ un point infiniment voisin ;

ρ le rayon de courbure qui correspond à l'élément PP′;

φ l'angle des deux rayons de courbure qui aboutissent aux points P et P′;

ds la longueur de l'élément PP′;

m la masse du fil rapportée à l'unité de longueur;

t la tension au point P;

R la pression que supporte la courbe au même point P.

Projetons les forces qui sollicitent l'élément PP′ sur la tangente au point P. Il vient

$$(t + dt)\cos\varphi - t = mg\,ds\,\frac{dy}{ds},$$

ou simplement

$$dt = mg\,dy.$$

Si l'on suppose que l'axe des x passe par le point où la tension est nulle, l'intégrale est

$$t = mgy.$$

Projetons les mêmes forces sur la normale au point P Il vient

$$mg\,ds\,\frac{dx}{ds} + (t + dt)\sin\varphi = \mathrm{R}\,ds,$$

ou

$$mg\,\frac{dx}{ds} + t\,\frac{\varphi}{ds} = \mathrm{R},$$

et puisque $\rho = \frac{ds}{\varphi}$, on a

$$R = mg\frac{dx}{ds} + \frac{t}{\rho} = mg\left(\frac{dx}{ds} + \frac{y}{\rho}\right).$$

2. *Un fil flexible passe sur une courbe située dans un plan vertical, et porte à ses extrémités deux poids égaux; le poids du fil peut être considéré comme nul vis-à-vis des poids qu'il supporte. Déterminer la pression exercée sur la courbe en un point donné.*

Conservons la notation du problème précédent, et nommons Q l'un quelconque des poids suspendus aux extrémités.

Si l'on projette sur la normale au point P les forces qui sollicitent l'élément PP′, il vient

$$(t + dt)\sin\varphi = R\,ds = R\rho\varphi,$$

ou simplement

$$t = R\rho.$$

Si l'on projette les mêmes forces sur la tangente au point P, on trouve

$$(t + dt)\cos\varphi - t = 0,$$

ou simplement

$$dt = 0, \quad t = \text{const}.$$

Or, au point où la tangente est verticale,

$$t = Q; \quad \text{donc} \quad Q = R\rho, \quad R = \frac{Q}{\rho}.$$

Corollaire. — La pression totale que supporte la courbe est

$$\int R\,ds = Q\int\frac{ds}{\rho} = Q\int\varphi.$$

Soit Φ l'angle des deux normales menées aux points où

le fil abandonne la courbe. La pression totale aura pour valeur la quantité $Q\Phi$ augmentée des pressions qui s'exercent aux points extrêmes. Ces pressions additionnelles seront nulles, si la tangente en ces points extrêmes est verticale; dans ce cas, la pression totale est πQ.

EULER, *Novi Comment. Petrop.*, 1775, p. 307.

3. *Un fil flexible passe avec frottement sur une courbe située dans un plan vertical, et porte à ses extrémités deux poids* Q, Q′, *dont le premier est trop considérable pour que l'équilibre puisse subsister s'il n'y avait pas de frottement; le poids du fil peut être négligé vis-à-vis des poids qu'il supporte. Quelle relation doit exister entre les poids* Q, Q′ *et le coefficient de frottement* μ, *pour que le système reste en équilibre?*

Conservons la notation du problème précédent, et considérons le système lorsqu'il est sur le point de glisser.

Si nous projetons les forces qui sollicitent l'élément PP′, d'abord sur la normale au point P, puis sur la tangente, il vient

$$(t + dt)\sin\varphi = R\,ds = R\rho\varphi,$$
$$(t + dt)\cos\varphi - t + \mu R\,ds = 0,$$

ou simplement

$$t = R\rho,$$
$$dt + \mu R\,ds = 0.$$

On tire de ces formules

$$dt = -\mu\frac{t}{\rho}ds,$$
$$\log t = -\mu\int\frac{ds}{\rho} = -\mu\int\varphi.$$

Pour que les calculs soient plus nets, remplaçons la lettre φ, qui nous représente un angle infiniment petit,

par la différentielle $d\theta$ d'un angle θ compté à partir d'une direction fixe. Nommons θ_1, θ_2 les valeurs de θ qui correspondent aux points extrêmes, où le fil abandonne la courbe, en sorte que Φ soit égal à la différence $\theta_2 - \theta_1$.

Nous aurons

$$\log t = -\mu \int d\theta = -\mu\theta + \text{const.} = -\mu\theta + C.$$

Si nous appliquons cette formule aux points extrêmes, il vient

$$\log Q = C - \mu\theta_1, \quad \log Q' = C - \mu\theta_2,$$

$$\log \frac{Q}{Q'} = \mu(\theta_2 - \theta_1), \quad \frac{Q}{Q'} = e^{\mu(\theta_2 - \theta_1)};$$

d'où il résulte que la condition d'équilibre est

$$\frac{Q}{Q'} \leqq e^{\mu(\theta_2 - \theta_1)}.$$

Lorsque le fil est sur le point de glisser, on a

$$\log t - \log Q' = \mu(\theta_2 - \theta),$$

$$\frac{t}{Q'} = e^{\mu(\theta_2 - \theta)};$$

alors la pression totale exercée sur la courbe est égale à la somme des pressions exercées aux points extrêmes, plus la quantité

$$\int R\,ds = \int t\frac{ds}{\rho} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} t\,d\theta = Q'\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{\mu(\theta_2 - \theta)}\,d\theta$$
$$= \frac{Q'}{\mu}\left[e^{\mu(\theta_2 - \theta_1)} - 1\right].$$

Corollaire. — Si les tangentes à la courbe aux points extrêmes sont verticales, on a

$$\theta_2 - \theta_1 = \pi,$$

et la condition d'équilibre devient

$$\frac{Q}{Q'} \leqq e^{\mu\pi}.$$

EULER, *Novi Comment. Petrop.*, 1775, p. 316.

SECTION V.

ÉQUILIBRE D'UN FIL ÉLASTIQUE.

Lorsqu'on suspend différents poids à l'extrémité d'un fil élastique et de longueur donnée, on observe que l'allongement est proportionnel au poids. Si l'on fait varier la longueur naturelle du fil, on trouve que l'allongement est proportionnel à cette longueur, tant que le poids du fil peut être considéré comme nul relativement au poids qu'il supporte.

Il résulte de là que, si l'on nomme a la longueur naturelle du fil, a' la longueur du fil lorsqu'il porte un poids P, et λ une constante qui dépend de la nature du fil, on a

$$a' = a\,(1 + \lambda P).$$

Cette loi fut d'abord énoncée par Hooke, dans le catalogue de ses découvertes placé à la fin de sa *Description of Helioscopes*. Elle y était cachée sous l'anagramme *ceiiinossttuu* (*ut tensio sic vis*); mais, plus tard, l'auteur ne craignit point de la développer et de la justifier, dans son Traité *De potentia restitutiva*. La théorie de Hooke servit de base au Mémoire de Leibnitz, *Demonstrationes novæ de resistentia solidorum*, qui fut inséré dans les *Acta eruditorum* pour l'année 1784. On peut consulter avec fruit sur ce sujet les *Elementa Physices* de S'Gravesande, lib. I, cap. 26.

1. *On suspend un fil élastique et pesant* ABC *par son*

extrémité A, *au point* B *on attache un poids* P, *et on laisse pendre librement la portion* BC. *Quelle est la longueur du fil placé dans ces circonstances?*

On connaît le coefficient d'allongement λ, les longueurs a et b des parties AB et BC dans l'état naturel du fil, ainsi que la masse rapportée à l'unité de longueur m dans l'état naturel.

Soient :

PP′ un élément infiniment petit de la partie AB;

t la tension au point P;

x la distance de ce point à l'extrémité supérieure A;

c la longueur naturelle d'une portion de fil dont le poids serait égal à P;

a', b' les longueurs des parties AB, BC dans les circonstances du problème.

Considérons d'abord la partie AB.

La masse rapportée à l'unité de longueur, dans le fil allongé, est égale à $\frac{m}{1+\lambda t}$; d'où résulte, pour l'élément PP′, la condition d'équilibre

$$t + dt + \frac{mg\,dx}{1+\lambda t} - t = 0,$$

ou

$$(1+\lambda t)\,dt + mg\,dx = 0,$$

$$t\left(1+\frac{1}{2}\lambda t\right) + mgx = \text{const.} = C.$$

Or, lorsque $x = 0$,

$$t = mg\,(a+b+c);$$

lorsque $x = a'$,

$$t = mg\,(b+c).$$

Substituant ces valeurs dans la formule qui précède et

retranchant les résultats, il vient

$$(a+b+c)\left[1+\frac{1}{2}\lambda mg(a+b+c)\right]$$
$$-(b+c)\left[1+\frac{1}{2}\lambda mg(b+c)\right]-a'=0;$$

d'où

$$a'=a\left[1+\frac{1}{2}\lambda mg(a+2b+2c)\right].$$

Considérons maintenant la partie BC.

Soit τ la tension à la distance y du point B.

On a

$$\tau\left(1+\frac{1}{2}\lambda\tau\right)+mgy=\text{const.}=C'.$$

Or, lorsque $y=0$,

$$\tau=mgb;$$

lorsque $y=b'$,

$$\tau=0.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente et retranchant les résultats, on trouve

$$b'=b\left(1+\frac{1}{2}\lambda mgb\right).$$

Ainsi,

$$a'+b'=a+b+\frac{1}{2}\lambda mg[a(a+2b+2c)+b^2].$$

Telle est la longueur du fil dans les circonstances indiquées.

2. *Un fil élastique et pesant* ABC *est fixé par son extrémité* A *au sommet d'un plan incliné* AB, *dont la longueur est égale à celle du fil dans son état naturel. Déterminer la longueur de la partie de fil* BC *qui pend au-dessous du plan.*

Soient a la longueur du plan, α son inclinaison, x la

distance au point A d'un point du fil AB, et t la tension en ce point.

Considérons d'abord la partie de fil qui repose sur le plan.

On a

$$dt + \frac{mg\sin\alpha}{1+\lambda t}\,dx = 0;$$

d'où

$$t\left(1+\frac{1}{2}\lambda t\right) + mgx\sin\alpha = \text{const.} = \text{C}.$$

Si l'on désigne par τ la tension au point B, par T la tension au point A, et que l'on applique la dernière formule à ces deux points, on obtient

$$\tau\left(1+\frac{1}{2}\lambda\tau\right) + mga\sin\alpha = \text{T}\left(1+\frac{1}{2}\lambda\text{T}\right).$$

D'ailleurs, s et $a-s$ désignant les longueurs naturelles des parties de fil BC et AB, on a

$$\tau = mgs, \quad \text{T} = mg\left[s+(a-s)\sin\alpha\right].$$

Ces valeurs, substituées dans la dernière équation, donnent

$$\frac{1}{2}\lambda mg(a-s)\left[2s+(a-s)\sin\alpha\right] = s.$$

De cette équation du second degré on tirera la valeur de s, et la reportant dans l'expression

$$s\left(1+\frac{1}{2}\lambda ms\right),$$

on aura la longueur effective de la partie de fil qui pend au-dessous du plan.

3. *Un fil élastique et rectiligne réunit deux poids qui reposent sur deux plans inclinés et parfaitement polis.*

Trouver la position d'équilibre du système, en négligeant le poids du fil.

Soient P et Q les deux poids, AC et BC les plans sur lesquels ils reposent, α, β les inclinaisons de ces plans sur l'horizon, θ l'inclinaison de la direction PQ sur la direction horizontale AB, a la longueur naturelle du fil, a' sa longueur effective dans l'état d'équilibre et T sa tension.

Considérons isolément l'équilibre du poids P, puis celui du poids Q. Il vient

$$P \sin\alpha = T \cos(\alpha - \theta),$$
$$Q \sin\beta = T \cos(\beta + \theta);$$

d'où

$$T = \frac{P \sin\alpha}{\cos(\alpha - \theta)} = \frac{Q \sin\beta}{\cos(\beta + \theta)},$$
$$\tang\theta = \frac{P \cot\beta - Q \cot\alpha}{P + Q}.$$

Cette équation détermine l'angle θ.

La longueur du fil est donnée par les équations

$$a' = a(1 + \lambda T) = a\left[1 + \lambda \frac{P \sin\alpha}{\cos(\alpha - \theta)}\right].$$

4. *Déterminer la courbe qu'affecte une corde élastique et pesante, lorsqu'on la suspend par ses deux extrémités. On suppose que la corde est homogène et que, dans son état naturel, elle est partout d'égale épaisseur.*

Soient m la masse de la corde rapportée à l'unité de longueur dans l'état naturel, t la tension et s l'arc compté à partir du point le plus bas.

Prenons l'axe des y vertical et dirigé de bas en haut.

On a, comme au problème 1 de la section II,

$$\frac{d}{ds}\left(t\frac{dx}{ds}\right)=0,\quad \frac{d}{ds}\left(t\frac{dy}{ds}\right)=\frac{mg}{1+\lambda t}.$$

La première équation nous donne

$$t\frac{dx}{ds}=\tau,$$

en désignant par τ la tension au point le plus bas.

Si l'on reporte la valeur de t dans la seconde équation, et que l'on pose, pour abréger, $\frac{dy}{dx}=p$, il vient

$$(1)\qquad \tau\frac{dp}{ds}=\frac{mg}{1+\lambda\tau\sqrt{1+p^2}}.$$

Nous allons ici substituer successivement à la variable s les variables x et y. Nous pourrons intégrer une première fois; alors nous aurons deux relations finies entre p, x et y, et l'élimination de p nous donnera l'équation de la courbe.

Remplaçons ds par sa valeur $\sqrt{1+p^2}\,dx$; il vient

$$(2)\qquad mg\,dx=\tau\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}+\lambda\tau\right)dp,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$mgx=\tau\left[\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)+\lambda\tau p\right],$$

$$(3)\qquad e^{\frac{mgx}{\tau}-\lambda\tau p}=p+\sqrt{1+p^2}.$$

Multiplions l'équation (2) par p, et remplaçons $p\,dx$ par sa valeur dy; nous trouvons

$$mg\,dy=\tau\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}+\lambda\tau p\right)dp.$$

L'intégrale est

$$(4) \qquad mgy = \tau\sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2}\lambda\tau^2 p^2;$$

nous n'ajoutons pas de constante, parce que nous admettons que l'ordonnée du point le plus bas est égale à $\frac{\tau}{mg}$.

On peut tirer facilement de cette équation la valeur de p en fonction de y; si l'on porte cette valeur dans l'équation (3), on aura l'équation de la courbe, laquelle est assez compliquée.

Il est cependant facile d'assigner la position d'un point donné à volonté sur la corde dans son état naturel. En effet, prenons l'équation (1), dans laquelle les variables sont s et p,

$$(5) \qquad \frac{mg\,ds}{1+\lambda\tau\sqrt{1+p^2}} = \tau\,dp.$$

Le premier membre représente le poids de l'élément ds; si donc nous appelons P le poids de l'arc s compté à partir du point le plus bas, nous aurons

$$(6) \qquad \mathrm{P} = \tau p, \quad p = \frac{\mathrm{P}}{\tau}.$$

Soit A un point donné sur la corde. On connaît le poids P de la partie de la corde qui est comprise entre le point milieu et le point A; par conséquent, si τ est connu, on connaît aussi la valeur de p correspondante au point A, dans la courbe que la corde décrit lorsqu'on la suspend par ses extrémités. Substituant cette valeur de p dans les équations (3) et (4), on aura les coordonnées du point considéré. Si maintenant nous supposons que A soit l'une des extrémités de la corde, les valeurs de x et de P relatives à cette extrémité étant fournies par les données, les équations (3) et (6) nous feront connaître τ.

L'équation (5) nous fait connaître la longueur de l'arc qui se termine au point A; car, si l'on intègre cette équation, on trouve

$$s = \frac{\tau}{mg}\left[p + \frac{1}{2}\tau p\sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2}\tau \log\left(p + \sqrt{1+p^2}\right)\right].$$

L'équation (2) nous donne le rayon de courbure ρ correspondant au même point A.

$$\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = \frac{\tau(1+p^2)}{mg}\left(1 + \lambda\tau\sqrt{1+p^2}\right).$$

On voit qu'au point le plus bas le rayon de courbure est égal à

$$\frac{\tau(1+\lambda\tau)}{mg}.$$

FINCK et BOBILLIER, *Annales de Gergonne*, t. XVII, p. 65.

5. *Deux poids égaux sont réunis par un fil élastique et sans pesanteur dont la longueur naturelle est connue. Déterminer, dans un plan vertical, deux courbes telles, que si l'on dépose les deux poids sur ces courbes à la même hauteur et partout où l'on voudra, ils restent en équilibre.*

Soient P l'un des poids et a la longueur naturelle du fil. Prenons l'axe des y vertical, dirigé de haut en bas et à égale distance des deux poids; plaçons l'origine de telle sorte que la tension du fil soit nulle en même temps que l'ordonnée des poids.

Les courbes cherchées sont deux demi-paraboles représentées par la double équation

$$\left(x \mp \frac{a}{2}\right)^2 = \lambda a \mathrm{P} y.$$

6. *Autour d'un cône vertical et parfaitement poli, on place un anneau élastique, dont on connaît le rayon naturel a et le poids* P. *Déterminer la position d'équilibre pour cet anneau.*

Soit α l'inclinaison des génératrices du cône sur l'axe. Le rayon de l'anneau dans sa position d'équilibre est

$$a\left(1+\lambda\frac{P}{2\pi}\cot\alpha\right);$$

cette valeur détermine la position d'équilibre, car l'anneau doit rester horizontal.

CHAPITRE VI.

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

Considérons un système de points matériels assujettis à des liaisons quelconques et sollicités par des forces choisies à volonté. Concevons que l'on donne aux points du système des mouvements infiniment petits et compatibles avec les liaisons, puis que l'on fasse le produit de chaque force par le petit chemin qu'a parcouru son point d'application suivant la direction de cette force, et qu'on ajoute tous ces produits. La somme obtenue sera nulle, quels que soient les mouvements imprimés, si l'équilibre subsistait avant que l'on eût dérangé le système; et réciproquement, si la somme est nulle pour tous les mouvements compatibles avec les liaisons, l'équilibre subsistait.

Cette proposition est connue sous le nom de *principe des vitesses virtuelles;* les projections, sur les directions des forces, des petits chemins que l'on conçoit parcourus par les points d'application correspondants, se nomment *vitesses virtuelles,* et les produits des forces par les vitesses virtuelles correspondantes se nomment *moments virtuels.*

L'énoncé du principe tel que nous venons de le donner suppose que les liaisons peuvent s'exprimer par des équations, ou, ce qui revient au même, que les points sont assujettis à rester sur des surfaces données. S'il arrive que les points soient simplement assujettis à ne pas pénétrer dans l'intérieur des surfaces, alors, pour qu'il y ait équilibre, il suffit que la somme des moments virtuels soit toujours nulle ou négative, et jamais positive.

Les géomètres remarquèrent d'abord cette propriété de l'équilibre dans quelques machines particulières, puis ils furent conduits pas à pas à reconnaître que cette loi est entièrement générale. Guido Ubaldi (*) l'observa d'abord dans l'équilibre du levier; Galilée (**) la découvrit plus tard dans le plan incliné et dans les machines qui s'y ramènent; le premier il introduisit dans la science l'expression *moment d'une force*, pour signifier le produit d'une force par la vitesse virtuelle de son point d'application. Pour qu'une machine sollicitée par deux forces soit en équilibre, dit-il, il faut que les forces aient des moments égaux et de directions contraires.

Le principe des vitesses virtuelles fut exposé pour la première fois dans toute sa généralité par Jean Bernoulli, dans une Lettre à Varignon (***) datée de Bâle, le 26 janvier 1717. Lagrange a depuis magnifiquement développé l'étonnante fécondité de ce principe, dans la *Mécanique analytique*.

Le même principe des vitesses virtuelles a donné naissance à d'autres lois générales qui s'en déduisent presque immédiatement. C'est dans cette classe qu'il faut ranger la loi de Torricelli (****), savoir, que deux poids invariablement liés entre eux sont en équilibre lorsque le centre de gravité du système a la plus basse position qui soit compatible avec les liaisons.

Tels sont encore les principes de Maupertuis et de Courtivron. Considérons un système de points matériels liés entre eux et sollicités par des forces P, Q, R, etc., dirigées vers des centres fixes, et fonctions des distances p, q, r, etc., de ces centres aux points d'application corres-

(*) *Mechanicorum liber*: de Librâ, de Cochleâ.
(**) *Della Sciensa mecanica; Opera*, t. I, p. 265; Bologna, 1655.
(***) *Nouvelle Mécanique*, t. II, sect. 9.
(****) *De motu gravium naturaliter descendentium*; 1644.

pondants. Déplaçons un peu le système, et soient dp, dq, dr, etc., les accroissements des distances p, q, r, etc. D'après le principe des vitesses virtuelles, si le système est en équilibre, nous aurons

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots = 0;$$

d'ailleurs, il est aisé de voir que le premier membre de cette équation est la différentielle d'une certaine fonction Π des distances p, q, r, etc., en sorte que l'équation pourra s'écrire

$$d\Pi = 0.$$

De là il résulte que, si Π est un maximum ou un minimum, le système est en équilibre. Tel est le principe de Maupertuis qui fut publié sous le nom de *loi du repos* dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour l'année 1740; Euler le développa plus tard dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*.

La réciproque du principe de Maupertuis ne serait pas exacte, car on peut avoir $d\Pi = 0$, et le système peut être en équilibre, sans que Π soit un maximum ou un minimum. Lagrange (*) a observé que, lorsque Π est un minimum, l'équilibre est stable, et que, lorsque Π est un maximum, l'équilibre est instable. En particulier, un système de points matériels soumis à la seule force de la pesanteur sera dans un équilibre stable ou instable, suivant que son centre de gravité aura la plus basse ou la plus haute position qui soit compatible avec les relations géométriques qui lient entre eux les différents points du système.

Le principe de Courtivron (**) peut s'énoncer ainsi:

(*) *Mécanique analytique*; 1re partie, sect. 5.

(**) *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*; 1748, p. 304, et 1749, p. 15.

Dans un système de corps en mouvement sous l'action de forces qui varient suivant une loi donnée, toutes les positions du système auxquelles la force vive est un maximum sont des positions d'équilibre stable, et celles où la force vive est un minimum sont des positions d'équilibre instable.

SECTION I.

ÉQUILIBRE.

1. *Un point matériel* P *éprouve de la part de deux centres fixes* A *et* B *des attractions constantes* α *et* β. *Déterminer sa position d'équilibre.*

Soient

$$AP = r, \quad BP = r', \quad AB = a.$$

Prenons le point A pour origine des coordonnées, et la droite AB pour axe des x.

Écartons un peu le point P de sa position d'équilibre; et soient dr', dr les variations des distances r, r'.

Nous devons avoir

$$\alpha\, dr + \beta\, dr' = 0,$$

où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad dr = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$r' = \sqrt{(a - x)^2 + y^2}, \quad dr' = \frac{-(a - x)\,dx + y\,dy}{\sqrt{(a - x)^2 + y^2}}.$$

Substituant ces valeurs, il vient

$$\alpha \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \beta \frac{-(a - x)\,dx + y\,dy}{\sqrt{(a - x)^2 + y^2}} = 0.$$

Ici dx et dy sont arbitraires, comme le déplacement imprimé; par conséquent, leurs coefficients doivent être

séparément nuls,

$$\frac{\alpha x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\beta(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}} = 0,$$

$$\frac{\alpha y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\beta y}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}} = 0.$$

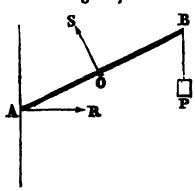
La dernière équation donne $y = 0$, et la première exige que β soit égal à α.

Ainsi l'équilibre n'est possible qu'autant que les attractions sont égales; et, dans ce cas, le point attiré peut être placé partout où l'on voudra sur la ligne qui joint les centres d'attraction.

EULER, *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1751, p. 184.

2. *Une tige rigide et sans poids* AOB *appuie son extrémité inférieure* A *contre une rainure verticale, porte sur un clou horizontal* O, *et soutient un poids connu* P *à son extrémité supérieure. Déterminer la position d'équilibre, ainsi que les pressions exercées sur le clou et sur la rainure.*

Fig. 27.



Soient a la longueur de la tige AB;

b la distance horizontale du clou à la rainure;

x la longueur de la partie AO;

y la distance de l'extrémité B à l'horizontale du support O;

R la pression supportée par la rainure;

S la pression supportée par le clou.

La pression R est horizontale et la pression S est perpendiculaire à la tige.

Supposons que l'extrémité A glisse un peu le long de la rainure sans que la tige abandonne le clou; alors le mo-

ment virtuel de la force R est nul, celui de la force S est un infiniment petit du second ordre, et l'on a simplement

$$P dy = 0, \quad dy = 0.$$

Or

$$y = \frac{a-x}{x}\sqrt{x^2-b^2}, \quad dy = \frac{ab^2 - x^{3}}{x^2\sqrt{x^2-b^2}}dx,$$

donc

$$ab^2 - x^3 = 0, \quad x = \sqrt[3]{ab^2}.$$

Cette valeur de x détermine la position d'équilibre.

Déterminons les pressions : pour cela, faisons glisser la tige le long de la rainure, de manière qu'elle reste parallèle à elle-même. Soit α le chemin parcouru. Il vient

$$-P\alpha + S\frac{b}{x}\alpha = 0;$$

d'où

$$S = P\frac{x}{b} = P\sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

Nous obtiendrons la pression R, si nous déplaçons la tige dans le sens de sa longueur. Soit β le chemin parcouru. Nous avons

$$R\frac{b}{x}\beta - P\beta\frac{\sqrt{x^2-b^2}}{x} = 0;$$

d'où

$$R = P\frac{\sqrt{x^2-b^2}}{b} = P\left(\frac{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

EULER, *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1751, p. 196.

3. *Trois points mobiles* A, B, C *sont assujettis à cette seule condition, que le triangle formé par ces points comme sommets reste constamment semblable à lui-même. On demande quelles sont les conditions d'équi-*

libre de trois forces appliquées à ces trois points dans le plan du triangle.

Quand le point C reste immobile, deux mouvements sont possibles : ou le triangle tourne sans se déformer autour du point C, ou bien le côté AB se met seul parallèlement à lui-même.

Nommons a et b les côtés du triangle opposés aux sommets A et B, α et β les forces appliquées à ces sommets, m et n les angles qu'elles font respectivement avec CA et CB.

Le premier mouvement virtuel nous donne

$$b\alpha \sin m + a\beta \sin n = 0;$$

le second donne

$$b\alpha \cos m + a\beta \cos n = 0.$$

Ces deux relations équivalent aux deux suivantes :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b}, \quad m = \pi + n.$$

La première exprime que les forces sont proportionnelles aux côtés du triangle opposés à leurs points d'application. La seconde exprime que les directions des forces α, β se coupent sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Les conditions d'équilibre sont donc que les directions des trois forces se coupent en un même point de la circonférence menée par les trois points donnés A, B, C, et que leurs intensités soient proportionnelles aux sinus des angles du triangle ABC, dont les sommets sont aux points d'application des forces.

Cette seconde condition d'équilibre, eu égard à la première, revient à la condition générale d'équilibre entre trois forces concourantes, à savoir, que chacune d'elles

soit proportionnelle au sinus de l'angle formé par les deux autres.

MOEBIUS, *Nouvelles Annales de Math.*, 1855, p. 85.

4. *Un point pesant, placé sur un plan incliné, est sollicité par une force* F *de direction connue. Déterminer, dans le cas d'équilibre, l'intensité de la force* F *et la pression exercée par le plan.*

Soient P le poids du point, α l'inclinaison du plan sur l'horizon, $\alpha + \varepsilon$ celle de la force F, et R la pression exercée par le plan sur le point.

Déplaçons le point sur le plan incliné et nommons β le chemin parcouru. Il vient

$$F\beta\cos\varepsilon - P\beta\sin\alpha = 0;$$

d'où

$$F = P\frac{\sin\alpha}{\cos\varepsilon}.$$

Déplaçons le point horizontalement d'une quantité δ. Il vient

$$R\delta\sin\alpha - F\delta\cos(\alpha+\varepsilon) = 0;$$

d'où

$$R = F\frac{\cos(\alpha+\varepsilon)}{\sin\alpha} = P\frac{\cos(\alpha+\varepsilon)}{\cos\varepsilon}.$$

EULER, *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1751, p. 191.

5. *Une tige rigide et sans poids* AOB *peut tourner librement dans un plan vertical autour de son extrémité* A, *qui est fixe, et porte un poids* P *à son extrémité inférieure* B. *La tige est soutenue au point* O *par un ressort disposé suivant un arc de cercle décrit de* A *comme centre, et dont la force de contraction est proportionnelle à l'inclinaison de la tige sur l'horizon. Déterminer la position d'équilibre.*

Soient a la longueur de la tige, b la distance AO de

l'extrémité fixe au point d'application du ressort, φ l'inclinaison de la tige sur l'horizon, E la force de contraction du ressort lorsque l'angle φ a la valeur α. La force de contraction correspondante à un angle quelconque φ sera $\frac{E\varphi}{\alpha}$.

Faisons tourner la tige d'un angle très-petit autour de son extrémité fixe. Il vient

$$Pa\cos\varphi\, d\varphi - \frac{E\varphi}{\alpha} b\, d\varphi = 0;$$

d'où

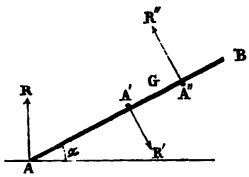
$$\frac{\cos\varphi}{\varphi} = \frac{Eb}{Pa\alpha}.$$

Telle est l'équation qui détermine l'angle φ, dans l'état d'équilibre.

EULER, *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1751, p. 196.

6. *Une barre pesante* AA'A''B *pose son extrémité inférieure* A *sur un plan horizontal, et s'appuie en* A', A'' *sur deux chevilles horizontales perpendiculaires à sa longueur; la première cheville* A' *est au-dessus de la barre, la seconde est au-dessous. Déterminer les pressions* R, R', R'' *exercées par le plan et les deux chevilles* A', A''.

Fig. 28.



Soient α l'inclinaison de la barre sur l'horizon, P son poids, G son centre de gravité, $A'G = a$, $AA' = b$, $A'A'' = c$.

Faisons glisser la barre dans le sens de sa longueur et d'une quantité quelconque β. Il vient

$$R\beta\sin\alpha - P\beta\sin\alpha = 0,$$
$$R = P.$$

Pour trouver la pression R′, faisons glisser la barre sur le plan d'une quantité très-petite, en même temps qu'elle tourne autour de la cheville A″ et s'éloigne de la cheville A′. Ce mouvement peut se décomposer en deux autres : l'un de glissement dans le sens de la longueur de la barre, l'autre de rotation autour de A″. Le premier mouvement a déjà été considéré, et le second nous donne

$$-R(b+c)\cos\alpha d\alpha + R'cd\alpha + P(c-a)\cos\alpha d\alpha = 0;$$

d'où

$$R' = \frac{a+b}{c} P\cos\alpha.$$

Nous obtiendrons R″ si nous faisons glisser légèrement la barre le long du plan, en même temps qu'elle tourne autour de A′ et s'éloigne de A″. Il vient

$$-Rb\cos\alpha d\alpha - Pa\cos\alpha d\alpha + R''cd\alpha = 0;$$

d'où

$$R'' = \frac{a+b}{c} P\cos\alpha = R'.$$

7. *Un fil de longueur donnée, situé dans un plan vertical, passe sur une très-petite poulie fixe* A, *et porte à ses extrémités deux poids* P *et* P′ *qui reposent sur deux courbes* S *et* S′. *La première courbe est connue, et l'équilibre du système subsiste, quel que soit le point de cette courbe sur lequel on place le poids* P. *On demande de déterminer la seconde courbe* S′. *Le poids du fil peut être négligé.*

Soient l la longueur du fil PAP′, ρ et ρ' les longueurs des parties AP et AP′, φ et φ' les inclinaisons de ces fils sur la verticale, et $f(\rho, \varphi) = 0$ l'équation de la courbe donnée.

Faisons glisser légèrement le poids P sur sa courbe;

nous aurons

$$P d.\rho \cos\varphi + P' d.\rho' \cos\varphi' = 0.$$

Cette relation subsiste en tout point des courbes S et S'; on peut donc l'intégrer, et il vient

$$P\rho \cos\varphi + P'\rho' \cos\varphi' = \text{const.} = C;$$

d'ailleurs

$$\rho + \rho' = l.$$

Si l'on élimine les quantités ρ et φ entre ces deux relations et l'équation

$$f(\rho, \varphi) = 0,$$

l'équation finale

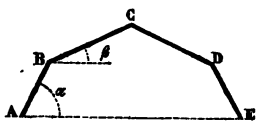
$$F(\rho', \varphi') = 0$$

représentera la courbe cherchée.

JEAN BERNOULLI, *Acta erudit.*, 1695, febr., p. 59.
LEIBNITZ, *ibid.*, apr., p. 184.
L'HOSPITAL, *ib.*, Suppl., t. II, sect. VI, p. 289.

8. *Quatre barres homogènes* AB, BC, CD, DE *réunies bout à bout par des charnières sont en équilibre dans un plan vertical. Les extrémités* A, E *sont engagées dans deux charnières fixes situées sur une même horizontale. Les barres inférieures* AB, DE *sont égales entre elles; les deux barres supérieures sont pareillement égales. Déterminer la relation qui existe entre les angles que les barres inférieures et les barres supérieures forment avec l'horizon.*

Fig. 29.



Soient $2a$ la longueur des barres inférieures, $2b$ celle des barres supérieures, P le poids des premières barres, Q celui des secondes, α l'inclinaison des premières sur l'horizon, β celle des secondes, et h la hauteur du centre de gravité du système au-dessus de l'horizontale AE.

On a

$$(P + Q)h = Pa \sin\alpha + Q(2a \sin\alpha + b \sin\beta).$$

Puisque l'équilibre a lieu, h est un maximum ou un minimum, et, par conséquent,

$$(F) \qquad 0 = (P + 2Q)a \cos\alpha d\alpha + Qb \cos\beta d\beta.$$

D'ailleurs, la distance AE étant invariable, sa différentielle est nulle, c'est-à-dire que l'on a

$$0 = d.(4a \cos\alpha + 4b \cos\beta) = a \sin\alpha d\alpha + b \sin\beta d\beta.$$

Multiplions l'équation (F) par $\sin\alpha \sin\beta$, et tirons de l'équation résultante la valeur de tang α; ayant égard à notre dernière formule, nous trouvons

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{P + 2Q}{Q} \text{tang}\,\beta.$$

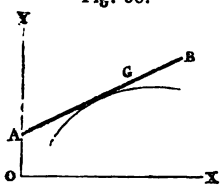
C'est la relation cherchée.

Si $P = Q$, il vient

$$\text{tang}\,\alpha = 3\,\text{tang}\,\beta \ (*).$$

9. *Une barre pesante* AB *repose tangentiellement sur une courbe dont le plan est vertical, et appuie son extrémité* A *contre un plan vertical perpendiculaire au premier; la courbe est de telle nature, que la barre reste en équilibre, quel que soit son point de contact. On demande de trouver l'équation de cette courbe.*

Fig. 30.



Soient G le centre de gravité de la barre et a la distance du point G à l'extrémité A. Prenons la verticale du point A pour axe des y; désignons par x, y les coordonnées du

(*) *Voir* p. 129, probl. 4.

point de contact sur la courbe, et par y' l'ordonnée du centre de gravité de la barre.

La Géométrie nous donne l'équation

$$y' = y + \left(a - x\frac{ds}{dx}\right)\frac{dy}{ds} = y - x\frac{dy}{dx} + a\frac{dy}{ds}.$$

Puisque l'équilibre a lieu, la dérivée de y' par rapport à x est nulle,

$$0 = -x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

et puisque l'équilibre a lieu quel que soit le point de contact, cette équation convient à tous les points de la courbe cherchée. Cette même équation se partage en deux autres : l'une,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

représente une ligne droite quelconque ; l'autre,

$$x^2\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 - a^2 = 0,$$

a pour intégrale

$$y + \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \text{const.}$$

Si l'on prend pour axe des x la position que la barre occupe lorsqu'elle est horizontale, la constante est nulle, et l'équation de la courbe cherchée se réduit à celle-ci,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Cette courbe est l'enveloppe d'une droite de longueur constante a, dont les extrémités se meuvent sur deux droites rectangulaires.

10. *Un point matériel, sollicité par plusieurs forces, est en équilibre quand il coïncide avec le centre de gravité de poids égaux, placés aux extrémités des droites qui représentent les forces.*

LEIBNITZ, *Journal des Savants*, 1693; *Opera*, t. III, p. 283.

11. *n points matériels fixes*, A, B, C,..., *attirent un point mobile* P *proportionnellement à la distance. Montrer que l'attraction résultante est dirigée vers le centre de gravité des points fixes, supposés de même masse, et qu'elle est proportionnelle à n fois la distance du point* P *à ce centre de gravité.*

12. *Un système de n points matériels, qui s'attirent proportionnellement à la distance, est en équilibre. Démontrer que l'équilibre continuera de subsister, de quelque manière qu'on déplace les points, pourvu que la somme*

$$n\Sigma(x^2+y^2+z^2)-(\Sigma x)^2-(\Sigma y)^2-(\Sigma z)^2,$$

relative aux coordonnées de ces divers points, ne change pas de valeur.

13. *Une barre* AB *appuie l'une de ses extrémités* A *contre un plan vertical, tandis que l'autre extrémité* B *repose sur une courbe; la barre reste en équilibre, quel que soit le point de la courbe sur lequel elle repose. Trouver l'équation de la courbe.*

Soient a la longueur de la barre et c la distance de son centre de gravité à l'extrémité B.

Si l'on prend la verticale du point A pour axe des y, et que l'on dispose l'origine de manière que l'axe des x coïncide avec la barre, lorsque celle-ci est horizontale,

on trouve

$$\frac{(c-y)^2}{c^2}+\frac{x^2}{a^2}=1,$$

équation d'une ellipse.

14. *Une barre homogène appuie son extrémité inférieure sur un plan horizontal, et son extrémité supérieure contre un plan vertical; à l'extrémité inférieure est attaché un fil horizontal qui s'enroule sur une très-petite poulie située sous la barre, et supporte un poids* Q. *Déterminer la position d'équilibre.*

Si l'on nomme P le poids de la barre et θ l'inclinaison de la barre sur l'horizon, on trouve

$$\operatorname{tang}\theta=\frac{P}{2Q}.$$

Cette équation détermine la position d'équilibre.

15. *Un point matériel est attiré par deux centres fixes en raison inverse du carré de la distance. Trouver l'équation de la surface sur laquelle il faut placer le point, pour qu'il reste en équilibre.*

Soient μ et μ' les attractions des deux centres à l'unité de distance, r et r' les distances de ces centres à un point quelconque de la surface cherchée.

On trouve l'équation

$$\frac{\mu}{r}+\frac{\mu'}{r'}=\text{const.}$$

16. *Une barre homogène* AB *peut tourner librement autour de son extrémité* A *comme charnière; à l'autre extrémité est attaché un fil qui s'enroule sur une très-petite poulie et supporte un poids* Q. *La poulie est située verticalement au-dessus de l'extrémité fixe* A, *à*

une distance connue b; on connaît aussi la longueur du fil, l. Trouver une courbe de telle nature, qu'il suffise de poser le poids Q *sur cette courbe, partout où l'on voudra, pour que le système soit en équilibre. On néglige le poids du fil.*

Soient $2a$ la longueur de la barre, P son poids, ρ la distance de la poulie à un point quelconque de la courbe cherchée, et θ l'angle que ce rayon fait avec la verticale.

L'équation de la courbe est en coordonnées polaires

$$P\rho^2 + 2\rho(2bQ\cos\theta - Pl) = \text{const.}$$

Sauveur proposa ce problème à l'Hospital, et celui-ci en donna la solution dans les *Acta eruditorum*, 1695, febr., p. 56. Jean Bernoulli fit observer que la courbe est du genre épicycloïde (*ibid.*, p. 59).

Supposons, par exemple, les données telles, que la constante arbitraire soit nulle. Alors, si nous posons, pour abréger,

$$\frac{2bQ}{P} = p,$$

l'équation de la courbe devient

$$\rho = 2l - 2p\cos\theta.$$

C'est l'équation de l'épicycloïde qu'engendre un cercle de rayon l, roulant extérieurement sur un cercle égal, lorsque la distance du point décrivant au centre du cercle mobile, auquel il est invariablement lié, est égale à p.

Ce problème peut être utile pour la construction des ponts-levis.

SECTION II.

STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE.

1. *Problème des moindres distances.* — Le choix des centres d'administration ou d'approvisionnement, l'éta-

blissement des usines, le tracé des routes destinées à relier les grandes lignes présentent un problème qui, pris dans toute sa généralité et réduit à des termes géométriques, peut s'énoncer ainsi : *Déterminer les positions d'un certain nombre de points, de telle sorte que leurs distances mutuelles et leurs distances à des points donnés, multipliées respectivement par des coefficients connus, donnent des produits dont la somme soit la plus petite possible. Ces points peuvent d'ailleurs être assujettis à d'autres conditions géométriques.*

Dans les applications, les coefficients qui affecteront les distances seront proportionnels à la fréquence des communications, aux poids à transporter; ils seront inversement proportionnels à la vitesse, à la facilité du transport. Les conditions géométriques se réduiront le plus souvent à placer les points cherchés sur des cours d'eau, sur des routes déjà construites, en un mot, sur des lignes données.

Soient p, q, r, etc., les distances, et λ, μ, ν, etc., les coefficients respectifs. La condition du minimum exige que l'on ait

$$\lambda dp + \mu dq + \nu dr + \ldots = 0,$$

pour tous les accroissements infiniment petits des distances qui sont compatibles avec les conditions imposées. Or cette équation est précisément celle à laquelle on serait conduit, si l'on appliquait le principe des vitesses virtuelles à la recherche des positions d'équilibre, en supposant que chacun des points cherchés fût attiré vers les autres points par des forces constantes proportionnelles aux coefficients qui multiplient leurs distances. Les positions cherchées sont donc des positions d'équilibre; de plus, elles sont des positions d'équilibre stable, sinon la somme $\lambda p + \mu q + \nu r \ldots$ serait un maximum, au lieu

d'être un minimum. Cette observation n'avance en rien la solution analytique, souvent impraticable, mais elle conduit immédiatement à une solution pratique fort ingénieuse.

Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'un seul point à déterminer. Dans un plan vertical, on fixera des anneaux de manière que leurs distances mutuelles soient proportionnelles à celles des points donnés; par chacun de ces anneaux on fera passer un fil léger portant à l'une de ses extrémités un poids proportionnel au coefficient du point représenté par l'anneau, et l'on réunira toutes les extrémités libres de ces fils sur un même anneau mince, lequel sera libre si le point cherché n'est assujetti à aucune liaison, et, dans le cas contraire, s'engagera sur une tige rigide courbée de manière à représenter la ligne sur laquelle le point cherché doit être situé. Le système abandonné à lui-même se mettra d'abord en mouvement, mais les frottements l'amèneront bientôt à un état d'équilibre stable. Alors l'anneau mobile occupera la position du point demandé.

C'est ainsi, par exemple, que l'on déterminera la position la plus avantageuse à l'établissement d'une station de chemin de fer, destinée à desservir une localité dont les communications n'ont point la même importance dans les deux directions de la voie.

Si l'on a un second point à déterminer conjointement avec le premier, on doublera le système précédent, en changeant les poids et les positions des anneaux fixes, s'il y a lieu; puis on attachera au nouvel anneau mobile un fil passant dans le premier anneau mobile, et portant un poids proportionnel au coefficient qui doit multiplier la distance des deux points cherchés. Les positions finales des deux anneaux mobiles seront les positions demandées. On agirait de même pour un plus grand nombre de points.

Il est à remarquer qu'en variant convenablement les circonstances initiales du mouvement, on pourra obtenir toutes les solutions dont le problème est susceptible.

LAMÉ et CLAPEYRON, *Journal des voies de communication;* Saint-Pétersbourg, 1827, n° 10.

2. *Une barre* AGB, *mobile autour de son extrémité* A, *est soutenue par un fil qui est attaché à son centre de gravité* G, *passe sur une très-petite poulie* C, *et porte un poids* Q. *La poulie est située sur la verticale de l'extrémité* A, *à une distance* AC *égale à celle du centre de gravité* AG. *Déterminer la position d'équilibre stable et celle d'équilibre instable. On néglige le poids du fil.*

Soient a la distance AC ou AG, l la longueur totale du fil GCQ, P le poids de la barre, et θ l'angle ACG ou AGC.

La distance du centre de gravité du système à l'horizontale menée par la poulie C est égale à la fraction

$$\frac{P(a + a\cos 2\theta) + Q(l - 2a\cos\theta)}{P + Q}.$$

Cette distance sera maximum ou minimum en même temps que la quantité

$$P\cos 2\theta - 2Q\cos\theta.$$

Si nous représentons cette quantité par u, nous avons

$$\frac{du}{d\theta} = -2P\sin 2\theta + 2Q\sin\theta.$$

Cette dérivée doit être nulle pour que l'équilibre ait lieu; par conséquent, dans les positions d'équilibre,

$$\theta = 0 \quad \text{ou} \quad \cos\theta = \frac{Q}{2P}.$$

Examinons laquelle de ces deux valeurs de l'angle θ correspond à l'équilibre stable, laquelle à l'équilibre instable.

On a

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -4P\cos 2\theta + 2Q\cos\theta.$$

Pour la valeur $\theta = 0$,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -4P + 2Q;$$

de là il résulte que, pour $\theta = 0$, l'équilibre sera stable ou instable, suivant que l'on aura

$$Q < 2P \quad \text{ou} \quad Q > 2P.$$

Si dans la valeur générale de $\frac{d^2u}{d\theta^2}$, mise sous la forme

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -4P(2\cos^2\theta - 1) + 2Q\cos\theta,$$

on pose

$$\cos\theta = \frac{Q}{2P},$$

il vient

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{4P^2 - Q^2}{P}.$$

Cette quantité est positive lorsque l'on a $Q < 2P$ ou, ce qui est la même chose, lorsque l'angle θ déterminé par l'équation

$$\cos\theta = \frac{Q}{2P}$$

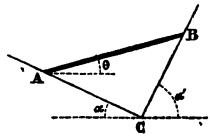
est réel; d'où il résulte que cette seconde valeur de l'angle θ ne saurait correspondre qu'à un état d'équilibre instable.

3. *Une barre homogène* AB *s'appuie par ses extré-*

mités sur deux plans inclinés; elle est en équilibre. Dire si l'équilibre est stable, ou s'il est instable.

Nommons $2l$ la longueur de la barre, θ son inclinaison sur l'horizon, α, α' les inclinaisons des deux plans CA, CB, et supposons que α' soit plus grand que α.

Fig. 31.



La distance du centre de gravité de la barre, au plan horizontal qui contient l'intersection des deux plans inclinés, a pour expression

$$l \sin\theta + 2l \frac{\sin(\alpha' - \theta)}{\sin(\alpha' + \alpha)} \sin\alpha$$
$$= \frac{l}{\sin(\alpha' + \alpha)} [\sin(\alpha' - \alpha)\sin\theta + 2\sin\alpha' \sin\alpha \cos\theta].$$

Cette distance sera maximum ou minimum, en même temps que la quantité

$$\sin(\alpha' - \alpha)\sin\theta + 2\sin\alpha' \sin\alpha \cos\theta = u.$$

Or

$$\frac{du}{d\theta} = \sin(\alpha' - \alpha)\cos\theta - 2\sin\alpha' \sin\alpha \sin\theta,$$

et cette dérivée doit être nulle pour que l'équilibre ait lieu; par conséquent,

$$\tang\theta = \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{2\sin\alpha' \sin\alpha}.$$

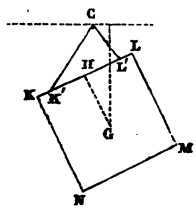
Puisque le second membre est positif, θ est plus petit que $\frac{\pi}{2}$. Ceci posé, la dérivée seconde

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\sin(\alpha' - \alpha)\sin\theta - 2\sin\alpha \sin\alpha' \cos\theta$$

est négative pour une valeur de θ inférieure à $\frac{\pi}{2}$; donc l'équilibre est instable.

4. *Une lame carrée et homogène* KLMN *est soutenue par un fil qui est attaché en deux points* K′, L′ *situés sur une arête de la lame, à égale distance des extrémités; tout le système est supporté par un crochet* C *qui s'engage dans le fil. Déterminer les circonstances de l'équilibre. On néglige le poids du fil.*

Fig. 32.



Soient G le centre de la lame;

GH une perpendiculaire à K′L′;

θ l'angle que cette perpendiculaire fait avec la verticale;

u le double de la distance du point G à l'horizontale qui passe au crochet;

φ et φ' les inclinaisons des fils CK′ et CL′ sur la verticale;

c le côté du carré;

a la distance K′L′ des deux points d'attache;

l la longueur totale du fil;

λ et λ' les longueurs des parties CK′ et CL′.

La Géométrie nous donne

$$u = c\cos\theta + \lambda\cos\varphi + \lambda'\cos\varphi',$$
$$a\cos\theta = \lambda\sin\varphi + \lambda'\sin\varphi',$$
$$a\sin\theta = \lambda\cos\varphi - \lambda'\cos\varphi',$$
$$\lambda + \lambda' = l;$$

d'où, si l'on élimine λ',

$$(1)\qquad u = c\cos\theta + \lambda(\cos\varphi - \cos\varphi') + l\cos\varphi',$$
$$(2)\qquad a\cos\theta = \lambda(\sin\varphi - \sin\varphi') + l\sin\varphi',$$
$$(3)\qquad a\sin\theta = \lambda(\cos\varphi + \cos\varphi') - l\cos\varphi'.$$

Telles sont les trois équations qui lient la fonction u et les quatre variables φ, φ', θ et λ.

On peut considérer φ, φ' comme des fonctions de θ et de λ, et regarder u comme une fonction des deux variables indépendantes θ et λ; alors, dans la position d'équilibre, les dérivées totales de u par rapport à λ et par rapport à θ seront séparément nulles.

Occupons-nous d'abord de la variable λ. Si nous différentions les équations (1), (2), (3) par rapport à cette variable, il vient

$$(4)\quad 0 = \frac{du}{d\lambda} = \cos\varphi - \cos\varphi' - \lambda \sin\varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} - (l-\lambda)\sin\varphi' \frac{d\varphi'}{d\lambda},$$

$$(5)\quad 0 = \sin\varphi - \sin\varphi' + \lambda\cos\varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} + (l-\lambda)\cos\varphi' \frac{d\varphi'}{d\lambda},$$

$$(6)\quad 0 = \cos\varphi + \cos\varphi' - \lambda\sin\varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} + (l-\lambda)\sin\varphi' \frac{d\varphi'}{d\lambda}.$$

Ajoutons les équations (4) et (6), puis retranchons les mêmes équations. Il vient

$$\lambda \sin\varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} = \cos\varphi,$$

$$(l-\lambda)\sin\varphi' \frac{d\varphi'}{d\lambda} = -\cos\varphi',$$

ou

$$\lambda \frac{d\varphi}{d\lambda} = \cot\varphi,$$

$$(l-\lambda)\frac{d\varphi'}{d\lambda} = -\cot\varphi'.$$

Reportons ces valeurs dans l'équation (5), et nous trouverons

$$\sin\varphi = \sin\varphi', \quad \varphi = \varphi';$$

c'est l'une des conditions de l'équilibre.

Considérons maintenant la variable θ. Si dans les équations (1), (2), (3) nous introduisons la condition $\varphi = \varphi'$,

ces équations deviennent

$$u = c\cos\theta + l\cos\varphi,$$
$$a\cos\theta = l\sin\varphi,$$
$$a\sin\theta = (2\lambda - l)\cos\varphi;$$

on en tire aisément la valeur de u en fonction de la seule variable θ,

$$u = c\cos\theta + \sqrt{l^2 - a^2\cos^2\theta},$$

et, par suite,

$$0 = \frac{du}{d\theta} = -c\sin\theta + \frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{l^2 - a^2\cos^2\theta}},$$

$$\theta = 0 \quad \text{ou} \quad \theta = \pm\arccos\frac{cl}{a\sqrt{a^2+c^2}}.$$

De là il résulte que, si l'on a $l < \frac{a}{c}\sqrt{a^2+c^2}$, il existe trois positions d'équilibre :

$$\theta = 0, \quad \varphi = \varphi' = \arcsin\frac{a}{l}, \quad \lambda = \lambda';$$

$$\theta = \arccos\frac{cl}{a\sqrt{a^2+c^2}}, \qquad \varphi = \varphi' = \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}};$$

$$\theta = -\arccos\frac{cl}{a\sqrt{a^2+c^2}}, \quad \varphi = \varphi' = \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Si l'inégalité $l < \frac{a}{c}\sqrt{a^2+c^2}$ n'est pas satisfaite, la première position d'équilibre existe seule.

Premier cas. $l < \frac{a}{c}\sqrt{a^2+c^2}$.

Lorsque $\theta = 0$, les dérivées $\frac{d^2u}{d\lambda^2}$, $\frac{d^2u}{d\theta^2}$ sont positives, et leur produit surpasse $\left(\frac{d^2u}{d\lambda\,d\theta}\right)^2$; par conséquent l'équilibre est instable. D'ailleurs u est une fonction continue

de θ; d'où il suit que, si l'on fait croître la variable θ d'une manière continue, on rencontrera alternativement un maximum et un minimum de la fonction. Les positions déterminées par les valeurs $\theta = \pm \text{arc cos} \frac{cl}{a\sqrt{a^2+c^2}}$ sont donc des positions d'équilibre stable.

Deuxième cas. $l > \frac{a}{c}\sqrt{a^2+c^2}$.

Lorsque $\theta = 0$, les dérivées $\frac{d^2u}{d\lambda^2}$, $\frac{d^2u}{d\theta^2}$ sont négatives, et leur produit surpasse $\left(\frac{d^2u}{d\lambda\, dt}\right)^2$; par conséquent l'équilibre est stable.

5. *Deux points pesants,* P, P′, *réunis par un fil sans poids, sont placés sur la surface convexe d'un cylindre horizontal. Déterminer la position d'équilibre, et dire si l'équilibre est stable ou s'il est instable.*

Il est clair que tout le système doit être situé sur un même cercle vertical.

Soient P et P′ les poids des deux points, φ et φ' les angles que les rayons menés à ces points font avec la verticale, et α l'angle sous-tendu par le fil.

La position d'équilibre est définie par l'équation

$$\text{tang}\frac{\varphi-\varphi'}{2} = \frac{P'-P}{P'+P}\,\text{tang}\frac{\alpha}{2},$$

et l'équilibre est instable.

6. *Un point matériel est attiré vers deux centres fixes, par des forces proportionnelles à la* $m^{\text{ième}}$ *puissance de sa distance à chacun de ces centres. Dire dans quel cas l'équilibre est stable, et dans quel cas il est instable.*

L'équilibre est stable si m est positif, il est instable si m est négatif.

7. *Un solide de révolution, homogène, repose par son sommet sur le sommet d'un autre solide de révolution, dont l'axe est également vertical. Le premier corps est tout entier au-dessus du point de contact, le second corps est au-dessous. On nomme r et r' les rayons de courbure des deux surfaces au point de contact.*

Démontrer que l'équilibre du premier corps sur le second est stable, instable ou indifférent, selon que la hauteur du centre de gravité du premier solide au-dessus du point de contact est inférieure, supérieure ou égale à $\frac{rr'}{r+r'}$.

8. *Un disque elliptique, homogène et très-mince est placé dans un plan vertical sur deux appuis, situés aux extrémités de deux diamètres conjugués et placés à la même hauteur. Démontrer que le disque est dans une position d'équilibre instable.*

9. *Un solide homogène est formé d'une demi-sphère et d'un cône, dont la base coïncide avec celle de la demi-sphère. Trouver la plus grande hauteur que peut avoir le cône, le solide étant assujetti à la condition d'être en équilibre stable, quand on pose le sommet de la demi-sphère sur un plan horizontal.*

La hauteur cherchée est égale au produit de $\sqrt{3}$ par le rayon de la sphère, et par conséquent la section méridienne du cône est un triangle équilatéral.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DU MOUVEMENT

ET

CINÉMATIQUE.

Dans une étude complète du mouvement d'un corps on doit considérer les positions successives du corps dans l'espace, le temps qu'il met à passer d'une position à une autre ou sa vitesse, et les causes de son mouvement ou les forces.

Quand on s'arrête à considérer les positions successives du corps en faisant abstraction du temps et des forces, on fait une *étude géométrique du mouvement*. Si l'on ajoute la considération du temps en faisant encore abstraction des forces, on se trouve dans le domaine de la *Cinématique*. Enfin, si l'on cesse de faire abstraction des causes du mouvement, on est dans la *Dynamique* proprement dite. Il est clair qu'avec la considération des forces est introduite celle de la quantité de matière que le corps possède, ou de sa *masse*.

L'étude géométrique du mouvement est née avec la Géométrie. Les méthodes pour décrire les courbes du second degré d'un mouvement continu, le tracé des tangentes de Roberval, la méthode des roulettes de Descartes appartiennent à cette Géométrie du mouvement.

La Cinématique, considérée comme une science distincte des autres sciences mathématiques, date de ce siècle. Ampère (*) a le premier fait ressortir l'avantage qu'on

(*) *Essai sur la classification des sciences.*

trouve à étudier d'abord le mouvement sans s'occuper de ses causes; il a nommé *Cinématique* la science qui a cette étude pour objet.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE FORME INVARIABLE.

Euler (*) a démontré le premier qu'un corps solide, mobile autour d'un point fixe, peut être amené d'une position à une autre position quelconque par une rotation autour d'un axe passant par le point fixe. De là il suit immédiatement que tout mouvement infiniment petit d'un corps solide, libre dans l'espace, peut se réduire à une translation de l'un de ses points, pris à volonté, accompagnée d'une rotation autour d'un axe qui passe par ce point.

MM. Poinsot (**), Chasles et Poncelet ont complété les recherches d'Euler. Ils sont arrivés à définir géométriquement, de diverses manières, le mouvement continu le plus général d'un corps solide.

On trouvera dans ce chapitre une série de théorèmes remarquables énoncés par M. Chasles dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* pour 1853, ainsi que diverses propositions éparses dans les écrits de cet auteur.

Nous ne considérerons en général que les mouvements infiniment petits d'un système de forme invariable. Toutes

(*) *Novi Commentarii Acad. Petrop.*, 1775.
(**) *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, 1852.

nos démonstrations seront fondées sur le principe des infiniment petits, que nous supposerons toujours présent à l'esprit du lecteur. Les points de notre système décriront en général des trajectoires infiniment petites du premier ordre; les lignes décriront des angles infiniment petits du même ordre. Si un point particulier ne décrit qu'une trajectoire infiniment petite du second ordre, nous conclurons immédiatement que ce point reste immobile : ce qui est tout à fait rigoureux.

1. Considérons une figure plane assujettie à rester dans un même plan, une droite tracée à volonté sur cette figure, et deux points a et b pris sur cette droite. Déplaçons la figure d'une manière quelconque. Soient a' et b' les nouvelles positions des points a et b sur le plan fixe, et m le point du plan où se coupent les deux positions de la droite. Nous pouvons supposer les points a et b choisis de telle sorte, qu'avant le mouvement le point b de la droite coïncide avec le point m du plan, et qu'après le mouvement la nouvelle position a' du point a coïncide avec le point m. Ceci posé, élevons une perpendiculaire sur le milieu de am, et une autre perpendiculaire sur le milieu de mb'; ces deux droites se couperont en un point F, centre du cercle circonscrit aux points a, (a', b), b', et il est clair qu'on pourra amener la droite de la première position à la seconde, par une rotation convenable autour du point F. Or la position de la droite détermine celle de la figure. Donc, *toute figure plane, assujettie à rester dans un plan, peut être amenée d'une position donnée à une autre position prise à volonté, par une simple rotation autour d'un point convenablement choisi.*

Admettons maintenant que le déplacement imprimé soit infiniment petit. Alors la trajectoire infiniment petite du point a se confond avec la droite aa' ou am, et celle

du point b avec la droite bb' ou mb'; par suite, le mouvement de la droite ab est en réalité une rotation autour de l'intersection F des normales aux trajectoires des deux points a et b. Or la droite ab entraîne la figure entière dans son mouvement autour du point fixe F; en sorte que chaque point de la figure tourne autour de ce point. Il s'ensuit que *les normales aux trajectoires de tous les points de la figure passent en un même point* F. Ce point se nomme, suivant Euler, le *centre instantané de rotation*. Le pied de la perpendiculaire abaissée du centre instantané de rotation sur une courbe qui fait partie de la figure est l'intersection des deux positions successives de la tangente à la courbe en ce point, ou, ce qui est la même chose, il est l'intersection des deux positions successives de la courbe.

2. Considérons toujours une figure plane assujettie à rester dans un même plan, et supposons que l'on donne à cette figure un nombre quelconque de positions différentes. Marquons dans le plan fixe les points F, F′, etc., autour desquels on doit faire tourner la figure, pour l'amener, par de simples rotations, de la première position à la seconde, de la seconde à la troisième, et ainsi de suite. Marquons aussi sur la figure les points f, f', etc., qui sont tour à tour les centres de ces rotations successives, et joignons par des droites les points F, F′, etc., et les points de la figure f, f', etc. Il est évident qu'on peut faire passer la figure par toutes les positions données, en faisant rouler le polygone ff'... sur le polygone FF′....

Maintenant, supposons que les positions données de la figure soient infiniment voisines et infiniment nombreuses. Alors, les polygones ff'... et FF′... se réduisent à deux courbes, et comme il n'est qu'un seul mouvement capable de faire passer la figure d'une manière continue

par toutes les positions données, il en résulte que *tout mouvement d'une figure plane dans un plan se réduit au roulement d'une courbe liée avec la figure sur une autre courbe fixe dans le plan.* Le point de contact des deux courbes est à chaque instant le centre instantané de rotation.

3. Si, dans le théorème 1, on remplace la figure plane par une figure sphérique assujettie à rester sur une sphère fixe, et que l'on remplace les droites par des arcs de grands cercles, on obtient des théorèmes correspondants, et en particulier celui-ci : *Tout mouvement infiniment petit d'une figure sphérique sur une sphère fixe se réduit à une rotation autour d'un point de la sphère comme pôle.*

4. De là il résulte, comme au théorème 2, que le mouvement le plus général que l'on puisse donner à une figure sphérique assujettie à rester sur une sphère fixe consiste à faire rouler une courbe liée avec la figure sur une courbe fixe tracée sur la sphère.

Si l'on conçoit que la figure sphérique soit liée avec un corps solide retenu par le centre de la sphère, on conclura que *le mouvement le plus général d'un corps solide retenu par un point fixe se réduit au roulement d'un cône lié avec le corps sur un autre cône fixe dans l'espace.* Ces deux cônes ont leur sommet commun au point fixe, et leur génératrice de contact est à chaque instant l'*axe instantané de rotation.*

5. Il suit du théorème précédent que *tout mouvement infiniment petit d'un corps solide peut se réduire à une translation rectiligne d'un point* O, *lié invariablement au corps et choisi à volonté, accompagnée d'une rotation autour d'un axe* OI *passant par le point* O.

On peut encore considérer le même déplacement infiniment petit comme résultant d'une rotation autour d'un certain axe FX parallèle à OI, et d'une translation parallèle à cet axe. En effet, si l'on imagine une section faite dans le corps perpendiculairement à l'axe OI, et une figure S tracée sur ce plan, après le mouvement infiniment petit du corps, la projection S′ de la figure S sur la position primitive du plan sécant sera une figure identique à la figure S, puisque le plan n'a fait que se déplacer parallèlement à lui-même. Il s'ensuit (théor. 1) qu'on peut amener la figure S de sa position initiale à la position S′ par une rotation autour d'un certain point F du plan primitif, puis de la position S′ à la position finale qu'elle occupe après le mouvement du corps, par une translation rectiligne perpendiculaire à son plan. La figure S entraînant le corps entier dans son mouvement, le corps aura passé de sa position initiale à sa position finale. Le premier mouvement est une rotation autour d'un axe FX parallèle à OI, le second est une translation parallèle au même axe. Rien n'empêche d'admettre que ces mouvements soient simultanés. D'après cela, *tout mouvement infiniment petit d'un corps solide libre se réduit à un mouvement de rotation autour d'un axe qui glisse sur lui-même pendant cette rotation;* de sorte que le mouvement du corps n'est pas autre chose que le mouvement d'une vis dans son écrou.

6. Les positions que l'*axe instantané de rotation et de glissement* FX occupe successivement dans l'espace forment une surface réglée. Les positions que le même axe instantané occupe successivement dans le corps forment une autre surface réglée. *Le mouvement continu du solide peut être considéré comme produit par le roulement de la seconde surface réglée sur la première, ac-*

compagné d'un glissement le long de la génératrice de contact.

7. Considérons encore un solide qui reçoit un déplacement infiniment petit, et un plan quelconque lié invariablement à ce corps; traçons une figure sur ce plan, et examinons le mouvement de la projection de cette figure sur la position primitive du plan. Cette projection reste identique à elle-même; car une ligne de la figure et sa projection ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite par rapport à l'angle des deux directions. Il en résulte, comme au théorème 5, que la projection de la figure tourne dans le plan primitif autour d'un point F. Les normales aux trajectoires des points de cette projection passent toutes au même point F. D'ailleurs elles coïncident avec les traces des plans normaux aux trajectoires décrites dans l'espace par les points de la figure primitive; car lorsqu'un plan est perpendiculaire à une droite, la trace du plan et la projection de la droite sur un même plan sont perpendiculaires entre elles. Par conséquent, *un plan étant considéré comme faisant partie du corps, les plans normaux aux trajectoires de ses points passeront tous par un même point de ce plan.* Nous nommerons ce point le *foyer* du plan.

Ce qui distingue le foyer d'un plan de tous ses autres points, c'est que sa trajectoire est perpendiculaire au plan.

8. Les points qui appartiennent à l'intersection de deux positions successives du plan ont leurs trajectoires situées dans le plan; car ces points appartiennent à la première position du plan, avant et après le mouvement. Au reste, si trois points non situés en ligne droite avaient leurs trajectoires dans le plan, le plan n'aurait fait que glisser sur lui même. Donc, *il existe dans le plan une infinité de points dont les trajectoires sont situées dans*

le plan même; tous ces points sont situés sur l'intersection de deux positions consécutives du plan. Nous appellerons cette droite la *caractéristique* du plan, suivant une expression employée par Monge dans la théorie des surfaces développables.

9. Si plusieurs plans sont liés invariablement au même corps solide, et que celui-ci reçoive un mouvement infiniment petit, les foyers α, β de deux plans se trouvent sur l'intersection Δ des plans normaux aux trajectoires de deux points a, b pris à volonté sur l'intersection D de ces deux plans. Par conséquent, *lorsque plusieurs plans liés invariablement au même corps passent par une même droite* D, *leurs foyers sont sur une deuxième droite* Δ.

Dans le même déplacement infiniment petit du mobile, deux plans menés par la droite Δ et liés à ce corps ont leurs foyers sur l'intersection des plans normaux aux trajectoires des deux points α, β pris sur la droite Δ. Ces plans normaux sont précisément les deux plans considérés en premier lieu; leur intersection est la droite D. Donc, réciproquement, *plusieurs plans menés par la droite* Δ *et liés au même mobile ont leurs foyers sur la droite* D; de sorte que ces deux droites jouissent de propriétés réciproques. Nous appellerons ces deux droites D, Δ, *droites conjuguées*.

10. Il résulte de la définition même du foyer que, *quand plusieurs plans passent par un même point, leurs foyers sont tous sur un même plan, qui a son foyer en ce point,* puisque le plan est perpendiculaire à la trajectoire du point.

11. Si nous supposons dans le théorème 9 que la droite D soit située à l'infini, nous aurons des plans parallèles

dont les foyers seront sur une même droite Δ; et comme cette droite a sa conjuguée située à l'infini, il en résulte qu'elle se meut parallèlement à elle-même; d'ailleurs, il est clair que toutes les droites qui se meuvent parallèlement à elles-mêmes sont parallèles entre elles. Donc, *quand plusieurs plans sont parallèles entre eux, leurs foyers sont sur une droite qui est toujours parallèle à un même axe, quelle que soit la direction commune des plans.*

12. Si tous les plans parallèles sont perpendiculaires à la direction de cet axe, leurs foyers seront sur une certaine droite X, qui glissera sur elle-même pendant le mouvement du corps.

Pendant ce glissement de la droite X sur elle-même, le corps ne pourra que tourner autour d'elle. Cette droite est l'axe instantané de rotation et de glissement dont l'existence a été démontrée plus haut (théorèmes 5 et 6).

13. Reportons-nous au théorème 9. Dans le mouvement infiniment petit du corps, les points α, β restent à la même distance de la droite D, puisque, étant les foyers de deux plans qui passent par cette droite, ils ont leurs trajectoires perpendiculaires à ces plans. Il en résulte que nous pouvons amener ces deux points et la droite Δ à leur position finale par une rotation du corps autour de la droite D. Par une même raison, en vertu de la réciprocité des droites D et Δ, nous pouvons amener la droite D à sa position finale par une rotation du corps autour de la droite Δ. Ces deux mouvements successifs ou simultanés amèneront le mobile à la position qu'il occupe à la fin du déplacement considéré; c'est-à-dire que *les deux droites conjuguées* D *et* Δ *sont deux axes de rotations simultanées qu'on peut imprimer au corps pour effectuer son déplacement.*

14. Il résulte du théorème 9 que *la caractéristique d'un plan a pour conjuguée la tangente à la trajectoire du foyer de ce plan.*

15. D'après les deux théorèmes précédents, on voit que la caractéristique d'un plan ne peut que tourner autour du foyer de ce plan, considéré comme un point fixe. Or, pendant ce mouvement, le plan ne peut que tourner autour de sa caractéristique. On peut donc dire, en général, que *tout déplacement infiniment petit d'une figure plane dans l'espace se réduit à une rotation du plan de la figure autour d'une droite de ce plan, pendant que cette droite tourne elle-même autour d'un point fixe, sans sortir de la position primitive du plan.*

16. Soient a un point du corps, et a' la position que ce point occupe dans l'espace après un mouvement infiniment petit. Considérons la droite aa', invariablement liée au corps. Après le mouvement infiniment petit, elle passe encore au point a'; par conséquent, les deux positions de cette droite sont dans un même plan. Si nous considérons ce plan comme invariablement lié au corps, sa caractéristique sera la droite aa' (théorème 8). Cette droite, dans sa première position, est tangente à la trajectoire du point a.

De là résulte ce théorème : *La tangente à la trajectoire d'un point jouit de la propriété d'être la caractéristique d'un plan;* et réciproquement, il est clair que *la caractéristique d'un plan est tangente à la trajectoire d'un de ses points, savoir, le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur la caractéristique* (théorème 15).

17. Soit D une droite normale à la trajectoire d'un de ses points a. Si nous projetons cette droite sur un plan fixe qui lui soit parallèle, la projection de la droite, avant

et après le mouvement infiniment petit, sera perpendiculaire à la projection de la trajectoire du point a; d'où il résulte (théorème 1) que la projection de la droite tourne autour de l'un de ses points b qui est fixe. Le plan normal à la trajectoire du point de la droite D qui se projette en b passe par cette droite. Le plan normal à la trajectoire du point a passe également par la droite D; donc (théorème 9) *la droite* D *est elle-même sa conjuguée* Δ, *et elle est normale aux trajectoires de tous ses autres points.*

18. Il suit de là que, quand une droite de longueur constante se meut dans l'espace, de manière à être toujours normale à la courbe décrite par l'une de ses extrémités, elle est normale aussi à la courbe décrite par son autre extrémité. *Quand, sur une surface engendrée par une ligne droite, on trace deux courbes qui coupent à angle droit toutes les génératrices, les segments de ces droites compris entre les deux courbes sont tous égaux entre eux.*

19. Une droite qui s'appuie sur deux droites conjuguées D, Δ est normale aux trajectoires de l'un quelconque de ses points d'appui (théorèmes 9 et 13); par conséquent, *cette droite est normale aux trajectoires de tous ses points.*

20. Lorsqu'une droite D′ s'appuie sur une autre droite D, et jouit de la propriété d'être normale aux trajectoires de tous ses points, elle s'appuie sur la droite conjuguée Δ, car les droites D′ et Δ sont situées dans le plan perpendiculaire à la trajectoire du premier point d'appui (théorèmes 9 et 13).

On voit, par les deux théorèmes précédents, que *deux droites conjuguées* D, Δ, *et deux autres droites conju-*

guées quelconques D′, Δ′, *sont toujours quatre génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde à une nappe,* c'est-à-dire que toute droite qui s'appuiera sur trois de ces lignes rencontrera nécessairement la quatrième.

21. Lorsqu'une droite rencontre l'axe de rotation X et lui est perpendiculaire, tous les points de cette droite décrivent des trajectoires normales à cette droite même (théorème 12).

Il en résulte, eu égard au théorème précédent, que tout plan perpendiculaire à l'axe de rotation X rencontre deux droites conjuguées quelconques D, Δ et l'axe lui-même en trois points qui sont en ligne droite; ou, en d'autres termes, *par deux droites conjugées* D, Δ, *et par l'axe de rotation, on peut faire passer un paraboloïde hyperbolique dont les génératrices soient perpendiculaires à cet axe.*

22. Dans un paraboloïde hyperbolique, trois génératrices d'un même système X, D, Δ sont parallèles à un même plan; donc la génératrice de l'autre système, qui est perpendiculaire à X et à D, est aussi perpendiculaire à Δ.

Ainsi, *la droite par laquelle se mesure la plus courte distance de deux droites conjuguées* D, Δ *rencontre l'axe de rotation et lui est perpendiculaire.*

23. Ce dernier théorème permet de *trouver l'axe de rotation* X, *quand on connaît en direction les trajectoires de trois points du corps.* En effet, soient a, b, c ces trois points. Les plans menés par a et b perpendiculairement aux trajectoires de ces points se couperont suivant une droite $\alpha\beta$ qui sera la conjuguée de la droite ab. On cherchera la droite qui mesure la plus courte distance des deux droites ab, $\alpha\beta$; elle s'appuiera sur l'axe cherché X.

et lui sera perpendiculaire. On déterminera de même, avec les deux points a, c ou b, c une autre droite jouissant des mêmes propriétés; l'axe X sera donc déterminé.

24. *Quand plusieurs droites* D, D',... *passent par un même point, leurs conjuguées* Δ, Δ',... *sont dans un même plan qui est normal à la trajectoire de ce point* (théorème 9). Réciproquement, *quand plusieurs droites sont dans un même plan, leurs conjuguées passent toutes par un même point qui est le foyer de ce plan* (théorèmes 7 et 9).

25. Nous pouvons considérer un système de droites parallèles comme les intersections de deux systèmes de plans parallèles. D'après cela et en vertu du théorème 11, *quand plusieurs droites sont parallèles entre elles, leurs conjuguées sont dans un plan parallèle à l'axe de rotation.*

26. Lorsqu'une droite D est située dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, toute droite menée dans ce plan par l'axe de rotation rencontre la droite conjuguée Δ (théorème 20); d'ailleurs, deux droites conjuguées ne sauraient être dans un même plan (théorème 9), à moins qu'elles ne coïncident. Donc, *quand une droite est située dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, sa conjuguée passe par le point où le plan rencontre cet axe.* Réciproquement, *si une droite rencontre l'axe de rotation en un point, sa conjuguée est située dans le plan mené par ce point perpendiculairement à l'axe.*

27. Quand une droite est tangente à la trajectoire de l'un de ses points a, sa conjuguée est située dans un plan perpendiculaire à la première, savoir, le plan dont le point a est foyer. Si l'on rapproche cette remarque du

théorème 16, on conclura que, *quand une droite est tangente à la trajectoire d'un de ses points, sa conjuguée est aussi tangente à la trajectoire d'un de ses points. Ces deux droites sont à angle droit, et la droite qui mesure leur plus courte distance est celle qui joint les deux points aux trajectoires desquels elles sont tangentes.*

En d'autres termes, *quand une droite est la caractéristique d'un plan, sa conjuguée est aussi la caractéristique d'un autre plan. Ces deux plans sont à angle droit; le foyer du premier est sur la deuxième droite, et le foyer du second sur la première droite. La droite qui joint ces deux foyers est celle qui mesure la plus courte distance des deux caractéristiques.*

Il résulte de là et des théorèmes 16 et 22 que la perpendiculaire abaissée du foyer d'un plan sur la caractéristique rencontre l'axe de rotation X, et lui est perpendiculaire.

28. Considérons une droite qui s'appuie sur deux droites conjuguées, et un plan perpendiculaire à cette droite. Le pied de la droite sur le plan se meut perpendiculairement à la droite (théorème 19); sa trajectoire est donc située dans le plan même, c'est-à-dire qu'elle appartient à la caractéristique du plan (théorème 8).

En d'autres termes, *deux droites conjuguées quelconques étant projetées orthogonalement sur un plan quelconque, leurs projections se coupent en un point situé sur la caractéristique du plan.*

29. Considérons un plan, et sur ce plan les traces de deux droites conjuguées. Si, par le foyer du plan, on mène une droite à l'une des deux traces, cette droite passera par la seconde trace (théorèmes 17 et 20); par conséquent, *deux droites conjuguées rencontrent un plan*

quelconque en deux points qui sont toujours en ligne droite avec le foyer du plan.

30. Étudions maintenant les relations de grandeur qui existent entre les divers éléments dont nous venons de considérer les situations relatives.

Soient υ la rotation du corps autour de l'axe X;

ε la translation de cet axe dans sa propre direction, c'est-à-dire l'espace décrit par chacun de ses points;

O et Ω les rotations autour de deux droites conjuguées D et Δ;

(D, X), (Δ, X), (D, Δ) les angles que font entre elles les droites D, X; Δ, X; D, Δ;

r la plus courte distance de la droite D à l'axe X;

ρ la plus courte distance de la droite Δ au même axe.

$r+\rho$ sera la plus courte distance des droites D et Δ (théorème 22).

Portons sur les axes D, Δ, X des lignes proportionnelles aux rotations qui ont lieu autour de ces axes, et regardons ces droites comme nous représentant les rotations respectives. On sait que nous pouvons composer ces lignes comme si elles représentaient des forces; on sait aussi qu'un couple de rotations est équivalent à une translation proportionnelle au moment de ce couple, et perpendiculaire à son plan.

Ceci posé, transportons les deux rotations O, Ω au point où la droite qui mesure la plus courte distance entre les axes D, Δ rencontre l'axe X. Alors nous avons en ce point trois rotations O, Ω, υ dont la dernière est la résultante des deux autres (théorème 13); par conséquent

$$(1) \qquad \frac{O}{\sin(\Delta, X)} = \frac{\Omega}{\sin(D, X)} = \frac{\upsilon}{\sin(D, \Delta)}.$$

Nous avons fait naître, par ce transport, deux couples

de rotations dont les moments sont Or et $\Omega\rho$. Projetons les translations que produisent ces couples, d'abord sur l'axe X, puis sur un plan perpendiculaire à cet axe; il vient

$$(2) \qquad Or\sin(D, X) + \Omega\rho\sin(\Delta, X) = \varepsilon,$$

$$(3) \qquad Or\cos(D, X) - \Omega\rho\cos(\Delta, X) = 0.$$

Ces deux dernières équations nous donnent

$$\varepsilon = Or\left[\sin(D, X) + \frac{\sin(\Delta, X)\cos(D, X)}{\cos(\Delta, X)}\right];$$

et, si l'on remplace O par sa valeur en fonction de v tirée des équations (1),

$$\varepsilon = vr\frac{\sin(\Delta, X)}{\sin(D, \Delta)}\left[\sin(D, X) + \frac{\sin(\Delta, X)\cos(D, X)}{\cos(\Delta, X)}\right].$$

D'ailleurs,

$$(D\Delta) = (DX) + (\Delta X);$$

par conséquent,

$$(4) \qquad \frac{\varepsilon}{v} = r\,\mathrm{tang}(\Delta, X).$$

On trouverait de même

$$(5) \qquad \frac{\varepsilon}{v} = p\,\mathrm{tang}(D, X).$$

De ces formules nous tirons cette conséquence (théorème 10), que, *un premier axe de rotation* D *étant pris à volonté, l'inclinaison du deuxième axe* Δ *sur l'axe instantané de rotation et de glissement* X *ne dépendra que de la distance du premier axe à ce dernier.*

Si la droite D est dirigée suivant la trajectoire d'un de ses points, la droite Δ sera dans le plan normal à cette trajectoire (théorème 9), et l'on aura

$$\mathrm{tang}(\Delta, X)\,\mathrm{tang}(D, X) = 1;$$

d'où l'on tire, en faisant le produit des équations (4) et (5),

$$r\rho = \frac{\varepsilon^2}{v^2} = \text{const.}$$

31. Si nous nous servons des équations (1) pour éliminer Ω de l'équation (2), il vient

$$O(r+\rho)\sin(D, X) = \varepsilon,$$

ou encore, d'après les équations (1),

$$O\Omega(r+\rho)\sin(D, \Delta) = \varepsilon v.$$

Le premier membre de cette équation est égal à six fois le volume du tétraèdre qui a pour arêtes opposées les deux lignes O, Ω, prises sur les axes D et Δ; par conséquent, *qu'on porte sur deux droites* D, Δ, *deux segments proportionnels aux rotations du corps autour de ces droites, le tétraèdre construit sur ces deux segments comme arêtes opposées aura son volume constant* (*).

32. Projetons sur une droite D les trajectoires de ses différents points; les projections seront égales entre elles et ne dépendront que de la rotation autour de l'axe simultané Δ. Soit p l'une de ces projections. Sa valeur sera

$$p = \Omega(r+\rho)\sin(D, \Delta);$$

en sorte que l'équation du théorème précédent nous donne la relation

$$Op = \varepsilon v.$$

On en conclut que *la rotation du corps autour d'une droite quelconque est en raison inverse du mouvement de cette droite estimé dans sa propre direction.*

Soient θ l'angle que la droite D fait avec la trajectoire

(*) *Voir* p. 81.

d'un de ses points a, et q la longueur de cette trajectoire infiniment petite. On aura

$$p = q \cos\theta,$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{O}q \cos\theta = \varepsilon v.$$

Si, par le même point a, on fait passer plusieurs droites D, D′, etc., on aura

$$\mathrm{O}\cos\theta = \mathrm{O}'\cos\theta' = \ldots = \frac{\varepsilon v}{q}.$$

Il s'ensuit que *plusieurs droites étant menées par un même point, si l'on porte sur ces droites, à partir de ce point, des segments proportionnels aux rotations du corps autour de ces droites, les extrémités de ces segments seront sur un plan perpendiculaire à la trajectoire du point; la rotation minimum aura lieu autour de la trajectoire du même point; et cette rotation, multipliée par la trajectoire du même point, forme un produit constant, quel que soit le point.*

33. *Considérons un plan* P *faisant partie du corps en mouvement.*

Soient

r la distance du foyer à l'axe instantané X;

ρ la distance de la caractéristique à cet axe;

O la rotation du plan autour de son foyer;

Ω sa rotation autour de sa caractéristique;

ϖ l'angle que le plan fait avec un plan perpendiculaire à l'axe X.

Abaissons du foyer une perpendiculaire sur la caractéristique. On a vu (théorème 27) que cette droite rencontre l'axe X et lui est perpendiculaire. Les extrémités de cette droite sont animées de deux mouvements rectan-

gulaires : l'un, parallèle à l'axe de rotation, est égal à ε; l'autre, perpendiculaire à cet axe, est égal à vr pour l'extrémité qui est au foyer, et à $v\rho$ pour l'extrémité qui est sur la caractéristique. Ces deux mouvements se composent en un seul, qui est perpendiculaire au plan P pour la première extrémité, et qui est situé dans ce plan pour la seconde extrémité. On a donc

$$r = \frac{\varepsilon}{v} \operatorname{tang} \varpi, \quad \rho = \frac{\varepsilon}{v} \frac{1}{\operatorname{tang} \varpi};$$

d'où l'on tire

$$r\rho = \frac{\varepsilon^2}{v^2} = \text{const.},$$

$$\frac{r}{\rho} = \operatorname{tang}^2 \varpi.$$

Quand deux plans P *et* P′ *sont perpendiculaires*, on a, pour ces plans,

$$\operatorname{tang} \varpi \operatorname{tang} \varpi' = 1,$$

et, par conséquent,

$$rr' = \frac{\varepsilon^2}{v^2} = \rho\rho'.$$

On en conclut que *les distances de leurs foyers à l'axe de rotation ont leur produit constant, et que les distances de leurs caractéristiques à l'axe de rotation ont aussi leur produit constant.*

34. Les deux rotations du plan autour de son foyer, et autour de sa caractéristique, ont pour résultante la rotation v autour de l'axe X; on a

$$O = v \cos \varpi, \quad \Omega = v \sin \varpi.$$

Dans le plan P menons une droite quelconque D, et nommons (C, D) l'angle que cette droite fait avec la caractéristique. Le trièdre dont les arêtes sont parallèles à

l'axe X, à la caractéristique et à la droite D, est rectangle le long de l'arête parallèle à la caractéristique (théorème 27). On a donc

$$\cos(D, X) = \sin\varpi \cos(C, D),$$

et, si l'on a égard à l'équation précédente,

$$\Omega \cos(C, D) = \upsilon \cos(D, X);$$

de sorte que, pour chaque plan mené par une même droite D, on a

$$\Omega \cos(C, D) = \text{const}.$$

Nous proposerons comme exercice de démontrer par l'analyse quelqu'une des propositions qui précèdent.

CHAPITRE II.

APPLICATIONS A LA GÉOMÉTRIE, AUX SYSTÈMES ARTICULÉS ET AUX ENGRENAGES.

1. Lorsqu'une courbe plane se meut dans un plan, et que l'on connaît, pour l'une de ses positions, les tangentes aux trajectoires de deux de ses points a et b, il est aisé, pour cette position, de résoudre les problèmes suivants :

Mener la normale et la tangente à la courbe décrite par un point m lié à la courbe mobile.

Déterminer le rapport des vitesses de deux points liés à la courbe mobile.

Trouver le point de contact de la coubre mobile avec son enveloppe.

La solution de ces problèmes découle immédiatement des propositions placées sous les nos 1 et 2 dans le chapitre précédent. En effet, connaissant les tangentes aux trajectoires des points a et b, on peut tracer les normales à ces trajectoires ; leur intersection sera le centre instantané de rotation pour la courbe mobile. Ce centre étant connu, il suffira de le joindre au point décrivant m pour avoir la normale et, par suite, la tangente à la courbe décrite par ce point. Les vitesses des différents points de la figure mobile seront entre elles comme les distances de ces points au centre instantané. La normale abaissée du même centre sur la courbe mobile la rencontrera au point de contact avec son enveloppe.

Si l'on connaît les trajectoires de deux points a et b de

la figure mobile, on pourra construire la courbe S′ décrite par le centre instantané sur le plan fixe du mouvement, et aussi la courbe S″ décrite par le même centre sur le plan mobile de la première figure ; dès lors, si l'on fait rouler la courbe S″ sur la courbe S′ en entraînant le point m, celui-ci décrira la même courbe que dans le premier mouvement. Ainsi l'on aura un nouveau mode de génération pour la courbe décrite par le point m.

Enfin, quand ce nouveau mode de génération est seul donné, on peut encore résoudre les mêmes problèmes ; car le point de contact entre les courbes S′ et S″ est à chaque instant le centre instantané de rotation par rapport à toute figure liée à la courbe S″.

MAGNUS, *Journal de Crelle*, 1832, t. VIII, p. 51, et t. IX, p. 135.

Appliquons ceci à quelques exemples.

2. On donne deux courbes fixes S′, S″, une courbe mobile S assujettie à rester tangente aux deux premières, et un point m lié avec la courbe S.

Pour mener la tangente à la courbe décrite par le point m, il suffit d'élever deux normales sur la courbe mobile à ses deux points de contact, et de joindre l'intersection de ces normales au point m ; cette droite de jonction sera la normale, la perpendiculaire sera la tangente.

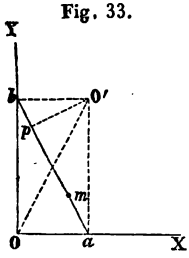
La courbe S peut se réduire à deux droites qui se coupent sous un angle donné ; chacune des courbes S′, S″ peut se réduire à un point fixe par lequel devra passer la courbe S ; alors on a autant de cas particuliers qui embrassent un grand nombre de courbes auxquelles nous savons mener les tangentes. Supposons, par exemple, que S′ soit une hyperbole équilatère, S″ le centre de cette hyperbole, S l'ensemble de deux droites rectangulaires ; l'intersection de ces droites décrira une lemniscate de

Jacques Bernoulli. On sait donc *mener la tangente à la lemniscate.*

3. On donne deux courbes fixes S′, S″, une courbe mobile S, et deux points *a*, *m* liés avec cette courbe; le point *a* est assujetti à rester sur la courbe S′, et la courbe S doit constamment toucher la courbe S″. Pour trouver la tangente à la courbe décrite par le point *m*, il suffit d'élever une normale à la courbe S′ au point *a*, et de tracer la normale commune aux deux courbes S, S″; la ligne qui joint l'intersection de ces deux normales au point *m* est normale à la courbe décrite par ce point, la perpendiculaire est la tangente. Supposons, par exemple, que S′ soit une droite, S″ un point et S la droite *am*; alors le point *m* décrit une conchoïde. Ainsi l'on sait *construire la tangente à la conchoïde.*

4. On donne deux axes rectangulaires OX, OY, une droite mobile *amb* de longueur constante et un point *m* pris sur cette droite. Si l'on promène en même temps les deux extrémités *a* et *b* de la droite sur les deux axes OX, OY, le point *m* décrit une ellipse. Dès lors, il nous est facile de *construire la tangente à l'ellipse.* En effet, sur O*a* et O*b* construisons le rectangle *a*O*b*O′; O′ sera le centre instantané de rotation, et, par conséquent, O′*m* sera la normale à l'ellipse, une perpendiculaire sera la tangente.

Fig. 33.



Dans le rectangle construit, la diagonale OO′ est égale à l'autre diagonale *ab*, laquelle est constante; de là il résulte que le lieu du centre instantané est un cercle C décrit de O comme centre avec un rayon égal à *ab*. D'un autre côté, le triangle rectangle *a*O′*b* a son hypoténuse constante; donc la courbe décrite par le centre instan-

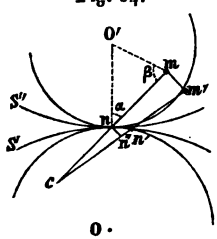
tané O′, dans son mouvement relatif autour de la droite *ab*, est un cercle C′ décrit sur cette droite comme diamètre. Par là nous voyons que, *lorsqu'un cercle mobile* C′ *roule intérieurement sur un cercle fixe* C *de rayon double, tout point m, pris dans le plan du cercle mobile, décrit une ellipse autour du centre du cercle fixe. Cette ellipse se réduit à un diamètre, lorsque le point décrivant est situé sur la circonférence du cercle mobile.*

Observons encore que la perpendiculaire O′*p*, abaissée du point O′ sur la doite *ab*, est normale à la courbe enveloppe de cette droite, laquelle courbe a pour équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \overline{ab}^{\frac{2}{3}}.$$

5. Les principes qui ont servi à résoudre les problèmes précédents nous permettent encore de *calculer le rayon de courbure de la courbe que décrit un point m, lié à une courbe mobile* S″, *lorsque celle-ci roule sans glisser sur une courbe fixe* S′, *située dans le même plan.*

Fig. 34.



Nous n'aurons nullement besoin de l'équation de la courbe décrite; il nous suffira de connaître les rayons de courbure *r* et *r′* des courbes S′ et S″.

Pendant la rotation infiniment petite que la courbe S″ effectue autour de son point de contact comme centre instantané de rotation, nous pouvons substituer aux deux courbes S″, S′ leurs cercles osculateurs au point de contact, et supposer que le premier de ces cercles roule sur l'autre en entraînant le point *m*; l'élément de la courbe décrite ne sera pas altéré.

Soient donc *n* le point de contact entre les courbes S′, S″; O, O′ les centres des cercles osculateurs à ces courbes au point *n*.

Faisons rouler le cercle O′ d'une quantité infiniment petite. Soient n' le nouveau point de contact, et m' la nouvelle position du point m. Les droites mn, $m'n'$ sont deux normales infiniment voisines de la courbe décrite par le point m, leur intersection c est le centre de courbure. Supposons que l'arc infiniment petit $\overline{nn'}$ soit égal à $r\varepsilon$; alors la droite nm a décrit autour du point n un angle égal à la somme $\frac{r\varepsilon}{r} + \frac{r\varepsilon}{r'}$ des rotations simultanées autour des centres O, O′; en sorte que l'élément $\overline{mm'}$ perpendiculaire à mn est égal à $\overline{nm}\ \varepsilon\ \frac{r+r'}{r'}$. D'ailleurs, si l'on nomme α et β les angles O′nm et O′mn, la projection $\overline{nn''}$ de $\overline{nn'}$ sur une parallèle à mm' a pour valeur $r\varepsilon\cos\alpha$. On a donc

$$\frac{\overline{mc}}{\overline{nc}} = \frac{\overline{mm'}}{\overline{nn''}} = \frac{(r+r')\,\overline{nm}}{rr'\cos\alpha},$$

$$\text{(A)} \qquad \frac{\overline{mc}}{\overline{nc}} = \frac{r+r'}{r}\ \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}.$$

De cette équation on tire, en observant que $\overline{mn} = \overline{mc} - \overline{nc}$,

$$\overline{mc} = \frac{(r+r')\sin(\alpha+\beta)}{r'\sin(\alpha+\beta) + r\sin\alpha\cos\beta}\,\overline{mn}.$$

Telle est la valeur du rayon de courbure.

Si le point m se trouve sur le contour du cercle mobile, alors $\beta = \alpha$ et

$$\overline{mc} = \frac{r+r'}{r' + \frac{1}{2}r}\,\overline{mn}.$$

C'est la valeur du rayon de courbure dans une épicycloïde.

Lorsque les deux cercles O, O′ ont leurs centres d'un

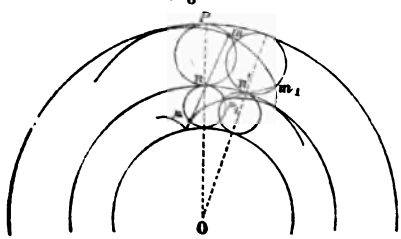
même côté de la tangente commune, le signe de r seul est changé.

6. A l'aide des mêmes principes on peut encore résoudre aisément plusieurs questions particulières. Nous n'en traiterons ici qu'une seule, que nous aurons l'occasion de rappeler plus tard.

Trouver la développée d'une épicycloïde.

Considérons une épicycloïde extérieure mm_1; tous nos raisonnements s'appliqueront sans difficulté à une épicycloïde intérieure. Soient O le centre du cercle fixe, r son rayon, r' celui du cercle mobile, m le point décrivant, n le point de contact, et np le diamètre qui passe à ce point.

Fig. 35.



Puisque mn est normale à l'épicycloïde, mp est tangente, c'est-à-dire que la tangente à une épicycloïde extérieure est la droite qui passe au point de contact du cercle mobile avec le cercle, enveloppe extérieure du cercle mobile dans ses positions successives. De là il suit que la droite mn est tangente à toute épicycloïde extérieure $\mu\mu_1$, où le cercle r joue le rôle de cercle enveloppe, pourvu que le point décrivant μ se trouve sur la droite mn, lorsque le cercle mobile de cette épicycloïde touche son enveloppe au point n.

Ceci posé, faisons rouler les cercles mobiles des deux épicycloïdes mm_1, $\mu\mu_1$, de manière que ces deux cercles restent toujours en contact. Soient n' le nouveau point de contact, m_1 la nouvelle position du point m, μ_1 la nouvelle position du point μ, α l'angle nOn' et ρ, ρ' les rayons du cercle fixe et du cercle mobile dans la nouvelle

épicycloïde. On a

$$\text{arc } m_1 n' = \text{arc } mn - r\alpha,$$
$$\text{arc } \mu_1 n' = \text{arc } \mu n - \rho\alpha,$$

ou bien, considérant les angles au centre sous-tendus par ces arcs dans les cercles auxquels ils appartiennent,

$$\text{angle } m_1 n' = \text{angle } mn - \frac{r}{r'}\alpha,$$

$$\text{angle } \mu_1 n' = \text{angle } \mu n - \frac{\rho}{\rho'}\alpha.$$

Or, puisque le point μ est, par hypothèse, sur la droite mn,

$$\text{angle } mn = \text{angle } \mu n;$$

d'où l'on voit, eu égard aux équations précédentes, que le point μ_1 sera sur la droite $m_1 n'$, si l'on a

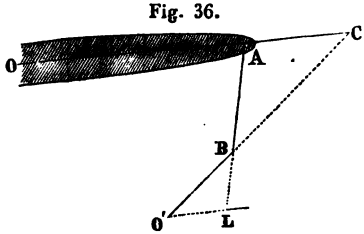
$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{r}{r'}.$$

Cette condition étant satisfaite, la seconde épicycloïde est la développée de la première. On en conclut que *la développée d'une épicycloïde est une épicycloïde semblable.*

7. Nous compléterons ces applications par l'étude et le tracé de quelques machines usuelles.

Bielle. — Soit une bielle AB qui transmet le mouvement d'un balancier OA à une manivelle O'B, O et O' étant les deux centres de rotation. Prolongeons OA et O'B jusqu'à leur rencontre en C. Le point C est le centre instantané de rotation relatif à la bielle; par conséquent, les différents points de ce corps tournent autour du

Fig. 36.



centre C avec des vitesses proportionnelles à leurs distances à ce point. Si la vitesse de l'extrémité A du balancier est donnée, on connaîtra celle de tout autre point, et en particulier celle de l'extrémité de la manivelle.

Soient ω' la vitesse angulaire de la manivelle, ω celle du balancier, et O'L une parallèle au balancier menée du centre O' jusqu'à la rencontre de la bielle prolongée. On a

$$\frac{\omega.OA}{\omega'.O'B}=\frac{AC}{BC},\quad \frac{\omega}{\omega'}=\frac{AC}{BC}.\frac{O'B}{OA}.$$

Les triangles semblables CAB, O'LB donnent

$$\frac{AC}{BC}=\frac{O'L}{O'B}.$$

Il s'ensuit

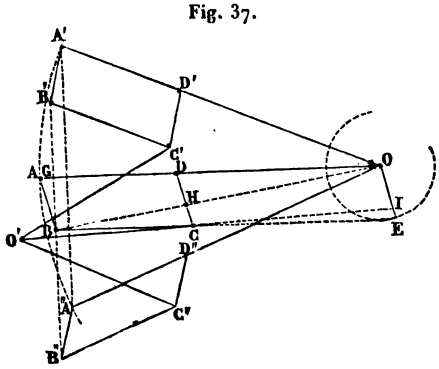
$$\frac{\omega}{\omega'}=\frac{O'L}{OA},$$

en sorte que le rapport des vitesses angulaires est proportionnel à la distance variable de la bielle à l'axe de la manivelle.

Coriolis, *Journ. de l'École Polyt.*, XXIe Cahier, 1832.

8. *Parallélogramme de Watt.* — Soient ODA un balancier de machine à vapeur qui oscille autour de l'axe O; AB, BC, CD trois tiges formant avec le balancier un parallélogramme articulé à ses quatre sommets; CO' une bride articulée en C, et mobile autour de l'axe fixe O'. Ce système est un parallélogramme

Fig. 37.



articulé de Watt. La tige du piston s'attache en B par une nouvelle articulation. La bride CO′ est le *contre-balancier*.

Afin d'étudier la courbe décrite par le point B, achevons le parallélogramme OABE; alors on voit que le point E décrit une circonférence autour du centre O, tandis que le point C décrit une autre circonférence autour du centre O′. Ainsi la courbe décrite par le point B est le lieu d'un point pris sur une droite CE, de longueur constante, dont les extrémités parcourent deux circonférences fixes. Il est aisé de construire ce lieu, en réalisant sur le papier le mode de génération que nous venons d'indiquer. On obtient une courbe dont la forme est analogue à celle d'un 8. Elle est évidemment symétrique par rapport à la droite qui joint les centres des deux circonférences, par conséquent son point double se trouve sur cette droite. Elle a pour le moins deux points d'inflexion, et, si les proportions sont convenablement choisies, l'une de ses branches s'écarte peu d'une perpendiculaire à la ligne OA, en sorte qu'elle est sensiblement rectiligne dans une certaine étendue, de part et d'autre de la ligne des centres : c'est pour cette raison qu'on l'a nommée *courbe à longue inflexion*.

Prolongeons les rayons O′C, OE jusqu'à leur rencontre en I; le point I est le centre instantané de rotation relatif à la droite BC : donc IB est la normale à la courbe décrite par le point B, une perpendiculaire est la tangente.

L'intersection L de la normale BI avec le rayon AO du cercle décrit par le point A est le centre instantané de rotation de la tige AB. Les vitesses des points A et B sont proportionnelles aux distances de ces points au centre L.

Soient v la vitesse de l'extrémité B de la tige du piston et ω la vitesse angulaire du balancier.

On a

$$\frac{v}{\omega . AO} = \frac{BL}{AL}.$$

Or, la ligne OI étant parallèle à la base AB du triangle BAL,

$$\frac{BL}{AL} = \frac{BI}{AO};$$

par suite,

$$\frac{v}{\omega} = BI.$$

Le rapport de la vitesse verticale du piston à la vitesse angulaire du balancier serait égal à la projection horizontale de BI.

Traçons la droite OB, et soit H son point de rencontre avec CD. On a

$$\frac{OH}{OB} = \frac{OD}{OA} = \text{const.};$$

d'où il suit que le point H décrit une courbe homothétique à la courbe décrite par le point B, le point O étant le centre d'homothétie. On profite de cette propriété pour fixer au point H la tige d'un piston, qui est ordinairement celui de la pompe à air.

Quand on veut construire un parallélogramme de Watt, on se donne à volonté les positions extrêmes OA′, OA″ du balancier, lesquelles ne doivent pas comprendre un angle très-grand. On se donne également à volonté, sur la direction moyenne du balancier, le point G, où passe la perpendiculaire B′B″ que la tige du piston devra sensiblement parcourir; puis, les dimensions du parallélogramme étant convenablement choisies, on trace le parallélogramme dans sa position moyenne ABCD et dans ses deux positions extrêmes A′B′C′D′, A″B″C″D″, en observant de placer B, B′, B″ sur la perpendiculaire à la

droite OA, qui passe au point G. Par les trois points C, C′, C″ on fait passer un cercle. Le centre de ce cercle est le point O′, autour duquel doit tourner la bride O′C. Dès lors tout est déterminé.

Watt se donnait ordinairement le point G à égale distance du point A et de la droite A′A″; dans ce cas, le centre O′ se trouve sur la droite BC. En effet, AB, A′B′ et A″B″ sont alors également inclinées sur B′B″ et, par conséquent, B′ et B″ sont à égale distance du point B. D'ailleurs, quelle que soit la position du point G, BC est perpendiculaire sur B′B″, et B′C′, B″C″ sont égales et également inclinées sur cette droite; donc ici BC est perpendiculaire sur le milieu de C′C″, le centre O′ est sur la droite BC.

Watt prenait de plus le point D au milieu du demi-balancier OA; dans ce cas, le centre O′ coïncide avec le point B, car alors les parallèles BB″, C′C″ sont toutes deux égales à la moitié de A′A″, BB″C″C′ est un parallélogramme, BC′ = B″C″, et, puisque B″C″ = BC, on a

$$BC' = BC.$$

On verrait de même que BC″ = BC.

Les autres proportions de Watt étaient les suivantes :

$$AB \text{ compris entre } \frac{3}{7} A'A'' \text{ et } \frac{1}{2} A'A'', \quad OG = \frac{3}{2} A'A''.$$

De cette dernière valeur il résulte

$$OA = \frac{3}{2} A'A'' + \frac{A'A''}{24}.$$

En effet,

$$\overline{OA'}^2 = (OG + GA)^2 = \frac{\overline{A'A''}^2}{4} + (OG - GA)^2;$$

d'où

$$4OG.GA = \frac{\overline{A'A''}^2}{4}, \quad GA = \frac{\overline{A'A''}^2}{16.OG} = \frac{A'A''}{24}.$$

Ces proportions sont encore celles que l'on adopte de préférence aujourd'hui.

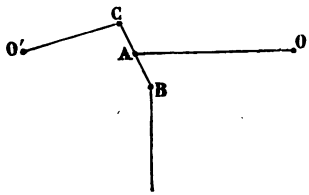
Le P. Carbonnelle, dans un Mémoire qui fait partie des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, t. XX, 1853, s'est proposé le problème suivant : *Trouver, dans des conditions de grandeur réalisables, les proportions du parallélogramme de Watt qui assurent la plus grande étendue possible au mouvement circulaire du balancier et au mouvement rectiligne de la tige du piston, en même temps qu'elles donnent à ce dernier mouvement toute la rectitude dont il est susceptible.* L'auteur arrive par l'analyse aux conclusions que voici :

Le point G doit être situé à égale distance du point A et de la droite A′A″; le point D doit être situé au milieu du demi-balancier OA; le côté AB doit être pris aussi grand que la machine le comporte; le rapport de la course du piston à la longueur du demi-balancier ne doit pas dépasser une certaine limite.

Ces résultats de l'analyse justifient admirablement les règles de Watt, qui n'étaient d'abord fondées que sur des tâtonnements nombreux.

Observons que, pour faire décrire à la tige du piston une *courbe à longue inflexion*, il n'est pas besoin d'un parallélogramme complet. En effet, soient OA le balancier qui tourne autour de l'axe O, et BAC une tige articulée en B, A et C avec la tige du piston, le balancier et une bride qui tourne autour de l'axe fixe O′. Les points A et C de la tige seront assujettis à se mouvoir sur deux circonférences fixes; par conséquent, le point B décrira une *courbe à longue inflexion*. L'appareil ainsi construit se nomme *parallélogramme simple*.

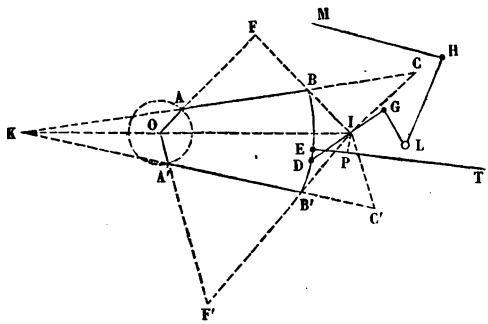
Fig. 38.



Pour le tracer, on marque la position moyenne et les positions extrêmes du point C, comme s'il s'agissait du parallélogramme de Watt; puis on fait passer un cercle par ces trois positions, et l'on prend le centre de ce cercle pour projection O′ de l'axe du contre-balancier.

9. *Coulisse de Stéphenson.* — On nomme ainsi le mécanisme employé dans les locomotives et dans les ma-

Fig. 39.



chines d'extraction des mines, pour changer à volonté le sens du mouvement en faisant varier la position du tiroir.

La tige du tiroir est assujettie à rester dans la direction TE qui passe par le centre O de l'arbre moteur. Son extrémité E porte un bouton ou coulisseau qui s'engage à frottement doux entre les deux lames parallèles d'une coulisse BB′. Celle-ci reçoit de l'arbre moteur un mouvement oscillatoire au moyen de deux bielles BA, B′A′, articulées en B, B′, qui embrassent deux excentriques montés l'un à côté de l'autre sur l'arbre moteur, dans des directions à peu près opposées.

On voit que le tiroir est commandé par la bielle AB ou par la bielle A′B′, suivant que sa tige est engagée vers l'une ou l'autre des extrémités de la coulisse.

Un levier coudé GLH, mobile autour de l'axe fixe L, soutient la coulisse par l'intermédiaire d'une tige GD articulée à ses deux extrémités.

Si le mécanicien vient à tirer la tringle HM, il abaisse la coulisse et fait mouvoir le tiroir, en même temps que la bielle AB s'approche de la tige TE et vient la commander. Le sens du mouvement peut être changé.

Cherchons le centre instantané de rotation de la coulisse et la vitesse de la tige du tiroir.

Nous remarquons d'abord que le point d'attache D entre la coulisse et le levier ne peut que décrire un cercle autour du point G. Il s'ensuit que le centre instantané de rotation de la coulisse est situé sur la droite GD.

Soit I ce centre;

Soient A, A′ les centres des excentriques; ces points peuvent être considérés comme appartenant aux bielles AB, A′B′.

Nommons encore r la distance OA ou OA′ du centre de l'arbre au centre de l'excentrique;

ω la vitesse angulaire de l'arbre;

v et v' les vitesses des points B et B′.

Dans un mouvement infiniment petit du système, le point A se meut sur une perpendiculaire au rayon OA; le point B, qui appartient à la coulisse, se meut perpendiculairement à la droite IB. Le centre instantané de rotation de la bielle AB est donc à l'intersection F des deux droites OA, IB. Les vitesses des points B et A sont entre elles dans le rapport des distances BF et AF; c'est-à-dire que nous avons

$$v = \omega r \frac{BF}{AF}; \tag{1}$$

de même,

$$v' = \omega r \frac{B'F'}{A'F'}.$$

Ces vitesses des points B et B′ de la coulisse sont entre elles comme les distances de ces points au centre I,

$$(2) \qquad \frac{BF \cdot A'F'}{AF \cdot B'F'} = \frac{IB}{IB'}.$$

Cette relation nous prouve que la ligne IO passe par le point de rencontre K des deux bielles prolongées. En effet, si nous menons les droites IC, IC′ parallèles à OA, OA′ jusqu'à la rencontre des directions des bielles, les triangles semblables BFA et BIC nous donnent

$$(3) \qquad \frac{BF}{AF} = \frac{IB}{IC};$$

de même,

$$\frac{B'F'}{A'F'} = \frac{IB'}{IC'}:$$

d'où l'on voit que la relation (2) se réduit à l'égalité

$$IC = IC',$$

qui entraîne évidemment la conséquence annoncée, puisque les triangles CIC′ et AOA′ ont leurs côtés parallèles deux à deux.

Le centre instantané de rotation de la coulisse est à l'intersection de la tige de suspension et de la droite qui joint le centre de l'arbre au point de rencontre des bielles prolongées.

La vitesse du point E de la bielle est à la vitesse v du point B dans le rapport de IE à IB. D'après les relations (1) et (3), sa valeur est

$$\omega r \frac{IE}{IC}.$$

La composante de cette vitesse parallèle à TE est la vitesse V de la tige du tiroir. Nous aurons sa valeur en

remplaçant dans la valeur précédente la droite IE par sa projection PE sur la direction de la tige,

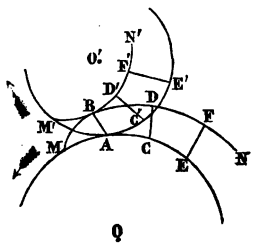
$$V = \omega r \frac{PE}{IC}.$$

10. *Tracé des engrenages plans.* — Un arbre de machine étant animé d'un mouvement de rotation quelconque, on propose de transmettre ce mouvement à un arbre parallèle, par un seul système de roues dentées, de manière que les vitesses angulaires des deux arbres soient à chaque instant dans un rapport donné. Tel est le problème des engrenages plans.

Les roues seront deux cylindres parallèles, qui auront pour axes de rotation les arbres réduits à des droites. Il s'agit de déterminer les bases de ces cylindres, sur un même plan perpendiculaire aux axes, de manière qu'elles puissent rester tangentes l'une à l'autre, en tournant autour de leurs centres avec des vitesses angulaires qui soient dans un rapport donné.

Soient O, O′ les pieds des axes sur le plan des bases; ce sont ces deux points que nous nommons les centres des bases. Prenons sur la droite indéfinie OO′ un point A dont les distances aux deux centres soient dans le rapport inverse des vitesses angulaires correspondantes. De O et O′ comme centres, avec OA et O′A pour rayons, décrivons deux circonférences; elles seront tangentes, et si elles tournent autour de leurs centres avec des vitesses angulaires dans le rapport donné, il est clair qu'elles rouleront l'une sur l'autre sans glisser. Seulement, comme le point A admet deux positions, l'une extérieure à la droite finie OO′, l'autre intérieure, dans la première

Fig. 40.



position les circonférences tourneront dans le même sens, et dans la seconde position elles tourneront en sens contraire. La première construction convient à un *engrenage intérieur*, et la seconde à un *engrenage extérieur*. Comme ce dernier genre est le plus employé, nous le considérerons seul. Au reste, tout ce que nous dirons pourra s'appliquer aux engrenages intérieurs, sans autre modification qu'un changement de direction.

Les circonférences que nous venons de construire se nomment les *circonférences primitives* de l'engrenage. Il nous reste à tracer les dents de ces circonférences par la condition que deux dents, primitivement en contact, restent tangentes, lorsqu'on fait rouler les circonférences l'une sur l'autre. On peut même supposer que l'une des circonférences reste immobile, pendant que l'autre roule en entraînant son centre; car rien ne sera changé à la position relative des deux figures.

Ici le problème devient indéterminé; car on peut se donner à volonté une courbe M'N' liée à la circonférence O', déterminer l'enveloppe MN de cette courbe lorsque la circonférence O' roule sur la circonférence O; et alors, si l'on regarde M'N' comme le profil de la dent de la première circonférence, il est clair que MN sera le profil de la dent de la seconde circonférence.

Dans ce roulement de la circonférence O' sur la circonférence O, supposée immobile, le centre instantané de rotation est le point de contact A; par conséquent, la normale abaissée de ce point sur la courbe M'N' la rencontre en un point de la courbe enveloppe MN. De là résulte une construction très-simple de l'enveloppe MN : des différents points C', E', etc., de la circonférence O' abaissez des normales C'D', E'F', etc., sur la courbe M'N', et mesurez les angles γ, ε, etc., sous lesquels ces normales coupent la circonférence. A partir du point de

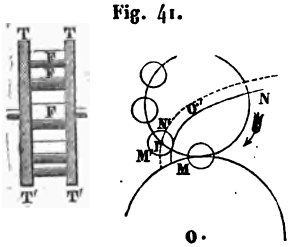
contact A, portez sur la circonférence O des arcs AC, AE, etc., respectivement égaux aux arcs AC′, AE′, etc.; par les extrémités des arcs construits, menez des droites qui coupent la circonférence O sous les angles γ, ε, etc., et portez sur ces droites des longueurs CD, EF, etc., égales à C′D′, E′F′, etc. Les points D, F, etc., appartiendront à la courbe MN. On déterminera de cette manière autant de points que l'on voudra.

La construction précédente peut être abrégée; car, si l'on observe que les droites CD, EF, etc., sont normales à l'enveloppe MN, on voit que, pour tracer cette courbe, il suffit de décrire des circonférences de C, E, etc., comme centres, avec des rayons égaux à CD, EF, etc., puis de tracer la courbe qui enveloppe toutes ces circonférences : ce sera la courbe cherchée.

Appliquons cette construction générale à quelques engrenages les plus employés.

11. *Engrenage à lanterne.* — Dans ce système d'engrenages, l'une des roues est formée de deux tourteaux TT′, réunis par des fuseaux cylindriques égaux F, F, parallèles à l'arbre et rangés en cercle autour de cette droite.

Fig. 41.



Ainsi, les dents de la circonférence O′ sont de petits cercles égaux M′N′, dont les centres sont situés à des distances égales sur la circonférence primitive.

Soit I le centre d'un de ces petits cercles. Lorsque la circonférence O′ roule sur la circonférence fixe O, le point I décrit une épicycloïde, la normale à cette épicycloïde est aussi normale au cercle M′N′. Par conséquent le profil MN de la dent correspondante est la courbe

que l'on obtient en portant sur les normales à l'épicycloïde décrite par le point I des longueurs égales au rayon du petit cercle M'N'.

On énonce d'ordinaire ce résultat en disant que les dents correspondant aux fuseaux ont pour profils des développantes d'épicycloïdes. Il est clair, en effet, que ces profils ont même développée que l'épicycloïde décrite par le point I; et comme cette dernière courbe a pour développée une autre épicycloïde (n° 6), il en résulte que les profils sont des développantes de cette seconde épicycloïde.

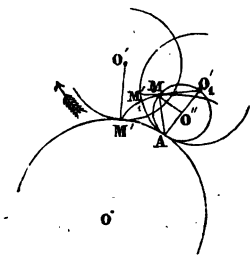
Le lieu que décrit dans l'espace le point de contact de deux dents conjuguées est un *limaçon de Pascal.*

Quand la lanterne est la roue motrice, le fuseau ne peut conduire la dent conjuguée qu'autant que le point de contact des deux dents n'a pas encore dépassé la ligne des centres OO'.

Si la lanterne est la roue conduite, le fuseau n'est conduit par la dent conjuguée qu'après que le point de contact a dépassé la ligne des centres.

12. *Engrenage à flanc.* — *Engrenage à épicycloïdes.* — Les profils des dents de l'une des circonférences primitives sont ses propres rayons.

Fig. 42.



Soit O'M' un rayon de la circonférence O', qui est profil d'une dent. Amenons l'extrémité M' au point de contact des deux circonférences primitives, puis faisons rouler la circonférence O' sur la circonférence O supposée fixe. Nommons O'_1, M'_1 les nouvelles positions de O', M', et A le nouveau point de contact. Sur O'_1A comme diamètre, décrivons une cir-

conférence, et soit O'' son centre. Cette circonférence coupe le rayon $O'_1 M'_1$ en un point M qui appartient au profil cherché de la dent correspondante, et comme l'angle $AO''M$ est double de l'angle $AO'_1 M'_1$, l'arc AM est égal à l'arc AM'_1. De là il suit que, si l'on fait rouler en même temps les circonférences O', O'' sur la circonférence O, en leur conservant toujours le même point de contact, le point M où le flanc touche la dent correspondante restera fixe sur la circonférence O''; ce point décrira donc le profil de la dent correspondante au flanc. Ainsi, la courbe cherchée est une épicycloïde.

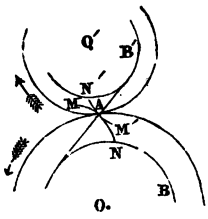
Ceci n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général. Dans l'intérieur de la circonférence O' faisons rouler une circonférence O'', et prenons pour profil des dents de la première circonférence l'épicycloïde décrite par un point M de la seconde. Le profil des dents correspondantes sur la circonférence O sera l'épicycloïde que décrirait le point M si la circonférence O'' roulait extérieurement sur la circonférence O. En effet, supposons que les circonférences O', O'' roulent simultanément sur la circonférence O supposée fixe, de manière à avoir toujours le même point de contact. Dans ce mouvement, le point M décrira sur le plan mobile de la circonférence O' l'épicycloïde donnée, et sur le plan fixe de la circonférence O une épicycloïde qui enveloppe la première dans ses diverses positions. L'engrenage à flanc est le cas particulier où l'épicycloïde donnée se réduit à un diamètre (n° 4).

Dans le mouvement réel de l'engrenage, les circonférences O, O', O'' roulent encore l'une sur l'autre en se touchant au même point, mais leurs centres restent fixes. Il en résulte que la circonférence O'' est dans l'espace le lieu des points de contact des dents correspondantes.

De même que dans l'engrenage à lanterne, la conduite n'a lieu que d'un seul côté de la ligne des centres.

13. *Engrenage à développantes de cercle.*— Le profil M'N' de la dent d'une circonférence primitive O est une développante d'un cercle concentrique N'B'.

Fig. 43.



Faisons rouler la circonférence O' sur la circonférence O, supposée fixe. La normale menée du point de contact A à la développante M'N' est nécessairement tangente au cercle N'B', d'où il suit qu'elle coupe la circonférence O sous un angle constant, et qu'elle enveloppe un cercle NB concentrique à cette circonférence. De plus, cette même droite est normale au profil MN de la dent de la circonférence O; donc ce profil est une développante du cercle NB. Ainsi, les profils des deux dents correspondantes sont des développantes de deux cercles N'B', NB concentriques aux circonférences primitives O', O et de rayons proportionnels à ceux des circonférences.

Dans le mouvement réel de l'engrenage, la normale commune aux deux profils MN, M'N' reste fixe dans l'espace; par suite, elle est le lieu des points de contact entre deux dents correspondantes.

Ce système d'engrenage jouit de trois propriétés assez remarquables :

Si les dents s'usent d'épaisseurs égales sur tout leur contour, elles se correspondront encore rigoureusement.

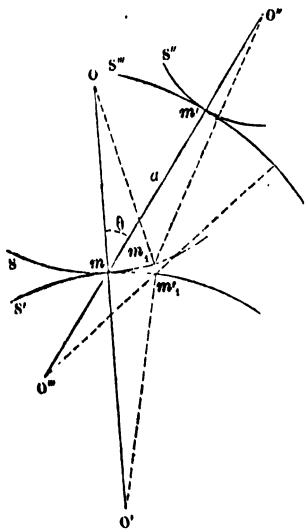
Si l'on fait varier la distance des arbres, les dents construites pour une certaine distance ne cesseront pas d'être rigoureusement correspondantes.

Deux roues à développantes de cercle, choisies à volonté, peuvent engrener ensemble. Il s'ensuit qu'une même roue

motrice peut conduire plusieurs roues et leur donner des vitesses de rotation différentes.

14. *Une courbe* S *roule sur une courbe* S′ *et entraîne dans son mouvement une courbe* S″ *liée avec elle. Celle-ci enveloppe dans son mouvement une quatrième courbe* S‴.

Fig. 44.



Soient :

r, r', r'', r''' *les rayons de courbure des quatre courbes aux points de contact simultanés ;*

O, O′, O″, O‴ *les centres de courbure ;*

m le point de contact des courbes S, S′*;*

a la distance mm′;

θ l'angle O*m*O″.

Démontrer qu'on a la relation

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \cos\theta\left(\frac{1}{r'' + a} + \frac{1}{r''' - a}\right).$$

Le mouvement élémentaire des courbes mobiles S, S″ est une rotation autour du centre instantané m, qui fait parcourir au point de contact sur chacune des deux courbes deux arcs élémentaires égaux mm_1, mm'_1.

Dans ce mouvement, la normale Om_1 de la courbe S vient se placer sur le prolongement de la normale $O'm'_1$ à la courbe S′; et la normale $O''m_1$ de la courbe S″ vient prendre la direction de la normale $O'''m'_1$ à la courbe S‴.

Les angles décrits par ces deux normales sont égaux, puisque ces deux lignes sont entraînées dans le même mouvement de la figure mobile.

L'angle que décrit Om_1 est égal à la somme

$$mOm_1 + mO'm'_1$$

ou

$$\frac{mm_1}{r} + \frac{mm_1}{r'}.$$

L'angle que décrit $O''m_1$ est la somme

$$mO''m_1 + mO'''m'_1,$$

qui a pour valeur

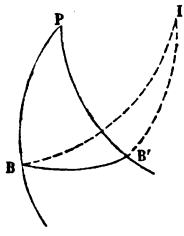
$$\frac{mm_1 \cos\theta}{r'' + a} + \frac{mm_1 \cos\theta}{r''' - a}.$$

La formule proposée s'ensuit.

Cette formule est due à Savary. Elle exprime que les droites OO'', $O'O'''$ se coupent sur la perpendiculaire élevée au point m à la droite $O''O'''$, et donne par là une méthode très-simple pour trouver un des quatre centres de courbure quand les trois autres sont connus.

15. *Joint universel ou joint de Cardan.* — Un axe A est terminé par une fourchette dont les extrémités sont articulées sur un anneau aux bouts d'un diamètre BC. Un second axe A′ est articulé de la même manière sur le même anneau aux extrémités d'un diamètre B′C′ perpendiculaire à BC.

Fig. 45.



Cet assemblage permet aux deux axes de se mouvoir librement dans toutes les directions autour du centre de l'anneau, qui est leur point de con-

cours obligé. Si l'on maintient les axes dans des directions fixes, et que l'on fasse tourner l'un d'eux sur lui-même, l'autre devra forcément prendre une rotation qui, en général, ne sera pas égale à celle du premier.

Cherchons la relation qui lie les vitesses de rotation simultanées ω, ω' de ces deux axes A, A′ de directions fixes.

Dans ce mouvement de rotation, les points B, B′, C, C′ restent sur la sphère qui a pour centre et pour rayon le centre et le rayon de l'anneau. Les points B et C sont assujettis à se mouvoir sur le grand cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe A. De même, les points B′, C′ ne peuvent se mouvoir que sur le grand cercle perpendiculaire à l'axe A′. Enfin, les points B, B′, dont le mouvement nous fera connaître les rotations des axes, sont assujettis à rester à une distance l'un de l'autre égale au quart d'un grand cercle.

On voit que la question est ramenée au problème suivant :

Un arc de grand cercle BB′, *égal au quart de la circonférence, se meut sur une sphère en appuyant constamment ses extrémités sur deux grands cercles fixes* PB, PB′. *Trouver le rapport des vitesses* ω, ω' *de ses deux extrémités.*

D'après le théorème 4 du chapitre précédent, le mouvement élémentaire de l'arc mobile est une rotation autour d'un pôle instantané I, qui se trouve à l'intersection de deux arcs de grands cercles perpendiculaires sur les trajectoires BP, B′P aux points B, B′. Les vitesses de ces points sont entre elles comme les distances de ceux-ci au diamètre de la sphère qui aboutit au pôle I :

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\sin BI}{\sin B'I}.$$

Les propriétés des triangles sphériques donnent

$$\frac{\sin BI}{\sin B'I} = \frac{\sin BB'I}{\sin B'BI} = \frac{\cos BB'P}{\cos B'BP};$$

et, en nommant β et β' les arcs PB et PB',

$$\cos\beta = \sin\beta' \cos BB'P,$$
$$\cos\beta' = \sin\beta \cos B'BP.$$

Il s'ensuit

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\beta'}.$$

On peut exprimer ce rapport en fonction d'une seule variable β.

Soit P l'angle BPB', qui est l'angle des axes ou son supplément.

On a

$$\cot\beta \cot\beta' = -\cos P,$$

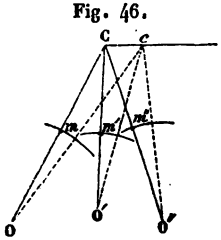
et, par suite,

$$\frac{\omega}{\omega'} = -\frac{1 - \sin^2\beta \sin^2 P}{\cos P}.$$

Ce rapport devient infini quand P devient égal à un angle droit; alors la transmission est impossible.

16. *Une figure plane se meut dans un plan; on connaît, à un instant donné, le centre instantané de rotation* C *et les centres de courbure* O, O' *des courbes décrites par deux des points de la figure* m, m'. *Trouver le rayon de courbure de la courbe décrite par un troisième point* m''.

Fig. 46.



Soient :

O'' le centre de courbure de la troisième courbe;

r, r', r'' les rayons de courbure Om, $O'm'$, $O''m''$;
p, p', p'' les distances mC, $m'C$, $m''C$;
c la position infiniment voisine du centre instantané;
u, u', u'' les angles OCc, $O'Cc$, $O''Cc$.

En exprimant que les arcs décrits sont proportionnels aux longueurs des normales abaissées du centre instantané, on obtient les relations

$$\frac{p(r+p)}{r\sin u} = \frac{p'(r'+p')}{r'\sin u'},$$

$$\frac{p'(r'+p')}{r'\sin u'} = \frac{p''(r''+p'')}{r''\sin u''}.$$

Comme on connaît la différence $u - u'$, la première relation fera connaître u et u'; alors on aura la direction Cc et, par suite, l'angle u''. Substituant les valeurs des angles u' et u'' dans la seconde relation, on en tirera la valeur du rayon de courbure r''.

On pourra calculer aisément par cette méthode le rayon de courbure de la *courbe à longue inflexion* et celui de plusieurs autres courbes intéressantes.

ARNOUX, *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVe Cahier, p. 109.

17. Soient O, O', O'' trois circonférences tangentes au même point m, et telles que le rayon de la troisième soit égal à la somme des rayons des deux autres.

Supposons d'abord que les deux premières circonférences roulent successivement et en sens contraires dans l'intérieur de la troisième. *Le point m, considéré comme appartenant à chacune des circonférences mobiles, décrira la même épicycloïde dans les deux mouvements.*

Supposons maintenant que la circonférence O roule sur l'extérieur de la circonférence O', puis que la circon-

férence O″ roule intérieurement et dans le même sens sur la même circonférence O′. *Le point m, dans ces deux mouvements, décrira la même épicycloïde extérieure à la circonférence* O′. Démontrer ces théorèmes.

Ceci montre qu'on n'a jamais à considérer que deux sortes d'épicycloïde.

EULER.

18. Deux circonférences égales O, O′ se coupent à angle droit, et une droite mobile égale à la distance des centres appuie constamment ses extrémités sur les deux circonférences. Montrer que *le point milieu de cette droite décrit une lemniscate de Jacques Bernoulli,* $r^2 = 2\cos 2\theta$, *dont les foyers sont les centres des deux circonférences.*

Conservons la même circonférence O et la même droite; mais remplaçons la circonférence O′ par une autre circonférence concentrique qui passe au centre de la circonférence O. *Alors un point pris sur le prolongement de la droite, à une distance de l'extrémité égale à la longueur même de la droite, décrira une lemniscate de Jacques Bernoulli; mais cette fois le centre de la circonférence* O *sera le centre de la courbe, tandis que celui de l'autre circonférence sera toujours l'un des foyers.*

On voit par là que la lemniscate est un cas particulier de la *courbe à longue inflexion.*

CARBONNELLE, *Bulletin de l'Acad. de Belgique*, t. XX, n° 5.

19. *On suppose deux hyperboles équilatères égales, et qui ont d'abord la position d'hyperboles conjuguées. L'une d'elles restant fixe, on fait rouler l'autre sur la première. Alors le centre de l'hyperbole mobile décrit une lemniscate de Jacques Bernoulli, dont les foyers coïncident avec ceux de l'hyperbole fixe.*

On établira ce théorème par la méthode employée au n° 4, en montrant que, dans le premier des deux modes de génération indiqués au numéro précédent, le centre instantané de la droite mobile décrit une hyperbole équilatère, soit dans son mouvement absolu, soit dans son mouvement relatif autour de la droite mobile.

DYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

CHOC DE SPHÈRES HOMOGÈNES SANS FROTTEMENT.

Imaginons que deux sphères homogènes et de même matière, qui se meuvent suivant la droite qui joint leurs centres, viennent à se choquer l'une contre l'autre.

Soient :

m, m' les masses respectives de ces deux corps ;

u, u' leurs vitesses avant le choc ;

v, v' leurs vitesses après le choc ;

ces vitesses étant comptées positivement dans une direction et négativement dans la direction contraire.

On a toujours l'équation

$$m(u - v) = m'(v' - u'). \tag{A}$$

Si les deux corps sont complétement dépourvus d'élasticité, cette équation suffit pour déterminer leur mouvement après le choc ; car ces deux corps, après s'être rencontrés, marcheront ensemble et ne formeront, pour ainsi dire, qu'un seul corps. Quand les corps ont quelque élasticité, il convient de distinguer deux périodes dans la durée du choc : pendant la première les centres de gravité se rapprochent, et pendant la seconde les centres de gravité s'éloignent. Si la pression mutuelle qui s'exerce entre les deux corps a des valeurs égales pendant les deux

périodes pour une même distance des centres de gravité, les corps sont dits *parfaitement élastiques*, et dans ce cas la seconde équation du mouvement est

$$v' - v = u - u'.$$

Lorsque les corps n'ont qu'une *élasticité imparfaite*, comme cela a lieu généralement dans tous les corps de la nature, la question devient beaucoup plus difficile, et l'état actuel de nos connaissances sur les réactions moléculaires ne nous permet pas de la résoudre complétement. Cependant on admet que la quantité de mouvement rendue à l'un quelconque des corps, dans la seconde période du choc, est égale au produit d'une quantité e, comprise entre zéro et l'unité et constante pour un même corps, par la quantité de mouvement qui serait restituée si le corps était parfaitement élastique. Alors on a l'équation

$$\text{(B)} \qquad v' - v = e(u - u').$$

Cette formule, donnée d'abord par Newton (*), concorde assez bien avec les résultats de l'observation. En effet, d'après une série d'expériences faites par Hodgkinson (**), la quantité e ne diminue que lentement à mesure que la vitesse relative des deux corps avant le choc augmente, et même cette quantité est sensiblement constante lorsque la vitesse relative est considérable.

Nous adopterons donc cette formule (B), et nous remarquerons qu'il suffit d'y poser $e = 1$ pour avoir l'équation rigoureuse qui convient aux corps parfaitement élastiques; tandis que, si l'on y fait $e = 0$, on a l'égalité $v' = v$ qui convient aux corps privés d'élasticité. Le nom-

(*) *Principia, Axiomata,* lex III, schol.

(**) *Reports of the Bristish Association for the Advancement of Science,* vol. III, p. 534.

bre e sera pour nous la mesure de l'élasticité. Il est d'ailleurs aisé de le déterminer expérimentalement pour un corps donné; car, si nous supposons que u' soit nul et que la masse m puisse être négligée vis-à-vis de la masse m', les équations (A) et (B) nous donnent

$$v' - v = eu,$$
$$v' = u' = 0;$$

d'où

$$v = -eu. \tag{C}$$

C'est-à-dire que le plus petit des deux corps acquerra, par l'effet du choc, une vitesse rétrograde dont le rapport avec la vitesse primitive est égal au nombre e. C'est le cas facile à réaliser d'un corps qui vient choquer un autre corps invariablement fixé sur la terre.

Le plus ancien ouvrage que nous connaissions sur le choc des corps est dû à J. Marc Marci de Crownland (*), médecin hongrois, qui publia à Prague, l'an 1639, un Traité *De proportione motûs seu regula sphymica*, dans lequel il étudie le choc des corps dépourvus d'élasticité ou parfaitement élastiques. Les lois qu'il a données pour ces derniers corps sont précisément celles que l'on adopte aujourd'hui. Cet ouvrage remarquable est cependant tombé dans un oubli général; il parait même qu'il ne parvint pas à la connaissance de Wallis, de Wren et de Huyghens qui, trente années plus tard, donnèrent à peu près les mêmes lois que Marci. Wallis (**) s'occupa des corps dépourvus d'élasticité, Wren (***) et Huyghens (****) étudièrent les corps parfaitement élastiques.

(*) MONTUCLA, *Histoire des Mathématiques*, t. II, p. 406.
(**) *Philos. Trans.*, 1668, p. 864.
(***) *Philos. Trans.*, 1668, p. 867.
(****) *Philos. Trans.*, 1669, p. 925. — *Journal des Savants*, mars 1669.

On peut consulter, sur le sujet qui nous occupe, les écrits de Wallis (*), de Keill (**), de Mariotte (***) et de Smeaton (****).

1. *Trois sphères m, m', m'' parfaitement élastiques sont en ligne droite ; le corps m est lancé sur le corps m' avec une vitesse donnée. Trouver la masse que doit avoir ce second corps, pour que la vitesse qu'il communiquera au corps m'' soit la plus grande possible.*

Soient :

m, m', m'' les masses des trois corps;

a la vitesse imprimée au corps m;

v la vitesse de ce corps après le choc dans le sens de la vitesse a;

a' la vitesse qu'il communique au corps m';

a'' la vitesse que ce corps m' communique au corps m''.

Les formules (A) et (B) nous donnent

$$m(a - v) = m'a',$$

$$a' - v = a,$$

et si l'on élimine v,

$$a' = \frac{2ma}{m + m'}.$$

De même,

$$a'' = \frac{2m'a'}{m' + m''}.$$

Par conséquent,

$$a'' = \frac{4mm'a}{(m + m')(m' + m'')}.$$

La question est ramenée à déterminer le minimum de

(*) *Mechanica*, pars tertia, 1671.

(**) *Introductio ad veram Physicam*, lect. XII, XIII, XIV.

(***) *Traité de Percussion.*

(****) *Philos. Trans.*, avril 1782.

la quantité

$$\left(\frac{m}{m'}+1\right)(m'+m'').$$

Différentions cette expression par rapport à m'; il vient

$$-\frac{m}{m'^2}(m'+m'')+\frac{m}{m'}+1=0,$$

$$m'^2-mm''=0, \quad m'=\sqrt{mm''}.$$

HUYGHENS, *Phil. Trans.*, 1669, p. 928.

2. *Une sphère parfaitement élastique est lancée contre un plan fixe et bien uni, avec une vitesse donnée en grandeur et en direction. Déterminer la grandeur et la direction de la vitesse après le choc.*

Soient u et v les vitesses d'incidence et de réflexion; α et β les angles que les directions de ces vitesses font avec la normale. Ces vitesses ont pour composantes parallèles au plan $u\sin\alpha$, $v\sin\beta$, et pour composantes normales $u\cos\alpha$, $v\cos\beta$.

Puisque le plan est parfaitement uni, le choc n'altère pas la composante de la vitesse d'incidence qui est parallèle au plan; on a donc

$$v\sin\beta = u\sin\alpha.$$

La composante normale se comportera comme si le choc était normal; en sorte qu'on aura, d'après l'équation (C),

$$v\cos\beta = u\cos\alpha.$$

On tire de ces deux équations

$$\beta=\alpha, \quad v=u;$$

c'est-à-dire que la vitesse n'est point altérée par le choc, et que l'angle de réflexion est égal à l'anglè d'incidence.

WALLIS, *Mechan.*, pars III, *De elatere, etc.*, prop. 2.

3. *Deux sphères parfaitement élastiques, animées de vitesses connues en grandeur et en direction, viennent à se heurter. Déterminer les vitesses de ces sphères après le choc et leurs directions.*

Soient m, m' les masses des deux sphères; O, O′ leurs centres à l'instant du choc; a, a' leurs vitesses avant le choc; AO, A′O′ les directions de ces vitesses; α, α' les angles que ces directions font avec la direction OO′.

Décomposons chacune des vitesses a, a' d'abord suivant la ligne des centres OO′, puis suivant une perpendiculaire à cette ligne située dans le plan AOO′ pour la vitesse a, et dans le plan A′O′O pour la vitesse a'. Les composantes de la première vitesse seront $a\cos\alpha$, $a\sin\alpha$, et celles de la seconde vitesse seront $a'\cos\alpha'$, $a'\sin\alpha'$.

Les composantes perpendiculaires à la ligne des centres ne seront point altérées par l'effet du choc; d'où il suit que le corps m continuera à se mouvoir dans le plan AOO′, et le corps m' dans le plan A′O′O.

Les composantes parallèles à la ligne des centres seront modifiées de la même manière que si les deux sphères se mouvaient avant le choc suivant la ligne OO′, avec des vitesses égales à ces mêmes composantes $a\cos\alpha$, $a'\cos\alpha'$. Dès lors, si nous représentons par v et v' les composantes suivant OO′ des vitesses des deux sphères après le choc, nous aurons, d'après les équations (A) et (B),

$$m(a\cos\alpha - v) = m'(v' - a'\cos\alpha'),$$

$$v' - v = a\cos\alpha - a'\cos\alpha';$$

d'où

$$v = \frac{m - m'}{m + m'}a\cos\alpha + \frac{2m'}{m + m'}a'\cos\alpha',$$

$$v' = \frac{m' - m}{m + m'}a'\cos\alpha' + \frac{2m}{m + m'}a\cos\alpha.$$

Nommons V et V′ les vitesses des deux sphères après leur choc et Φ, Φ′ les angles que les directions de ces vitesses font avec la direction OO′. Nous aurons,

$$V^2 = v^2 + a^2 \sin^2 \alpha, \quad V'^2 = v'^2 + a'^2 \sin^2 \alpha',$$

$$\operatorname{tang} \Phi = \frac{a \sin \alpha}{v}, \quad \operatorname{tang} \Phi' = \frac{a' \sin \alpha'}{v'}.$$

KEILL, *Introductio ad veram physicam*, lect. 14.

4. *Deux sphères imparfaitement élastiques se meuvent avec des vitesses données sur une même ligne droite et dans la même direction, lorsque l'une d'elles vient à heurter contre l'autre. Déterminer les vitesses de ces deux corps après le choc.*

Soient m, m' les masses des deux corps, a, a' leurs vitesses avant le choc, v, v' leurs vitesses après le choc et e leur élasticité commune.

D'après les formules (A) et (B), on a

$$m(a - v) = m'(v' - a'),$$
$$v' - v = e(a - a');$$

d'où

$$v = \frac{ma + m'a'}{m + m'} - \frac{m'e(a - a')}{m + m'},$$

$$v' = \frac{ma + m'a'}{m + m'} + \frac{me(a - a')}{m + m'}.$$

MACLAURIN, *Choc des corps*, p. 30. Prix de l'Acad., t. I.

5. *Trouver la somme des forces vives qui animent après le choc les deux sphères considérées dans le problème précédent.*

On trouve

$$mv^2 + m'v'^2 = ma^2 + m'a'^2 - \frac{mm'(1 - e^2)(a - a')^2}{m + m'}.$$

Cette formule montre que, *par l'effet du choc, la somme des forces vives diminue d'autant plus que l'élasticité est moins considérable.*

6. *Avec quelle vitesse une bille doit-elle choquer une bille égale, déjà animée d'une vitesse connue a, pour que le premier corps reste immobile après le choc?*

L'élasticité des deux billes est e.

La vitesse imprimée à la première bille doit être

$$\frac{1+e}{1-e}a.$$

7. *Déterminer les vitesses a et b que doivent avoir deux sphères* A *et* B, *qui se meuvent suivant une même direction, pour qu'après le choc, le premier corps* A *reste en repos, et le second* B *continue à se mouvoir avec une vitesse connue* β.

L'élasticité commune des deux corps, e, et leurs masses m, m' sont données.

On trouve

$$a = \frac{1+e}{e}\,\frac{m'\beta}{m+m'},$$

$$b = \frac{(em'-m)\beta}{e(m+m')}.$$

MACLAURIN, *Choc des corps*, p. 42. Prix de l'Acad., t. I.

8. *Une sphère* A *est lancée contre une sphère* B *en repos; on veut qu'après le choc, la première sphère* A *reste en repos, et la seconde* B *se mette en mouvement avec une vitesse égale à la* $n^{\text{ième}}$ *partie de la vitesse primitive du premier corps. Déterminer l'élasticité e des deux sphères et le rapport* $\frac{m'}{m}$ *de la masse du second corps à celle du premier.*

On trouve

$$e = \frac{1}{n}, \quad \frac{m'}{m} = n.$$

9. *Deux sphères parfaitement élastiques, qui se meuvent suivant une même droite avec des vitesses égales et contraires, viennent à se heurter. Quel doit être le rapport de leurs masses, pour que l'une d'elles reste en repos après le choc?*

Soient m' la masse de la sphère qui doit rester en repos après le choc et m celle de l'autre sphère.

On trouve le rapport

$$\frac{m'}{m} = 3.$$

10. *Des billes en nombre quelconque et de même élasticité sont disposées en ligne droite; on imprime à la première bille une vitesse connue, dans la direction des autres corps. Trouver la vitesse que la dernière bille recevra.*

Soient n le nombre des billes, m_1, m_2,..., m_n leurs masses, e leur élasticité commune, a la vitesse imprimée à la première bille et v la vitesse cherchée que recevra la dernière bille.

On trouve

$$v = (1+e)^{n-1} \frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot \frac{m_2}{m_2+m_3} \cdots \frac{m_{n-1}}{m_{n-1}+m_n} a.$$

MACLAURIN, *Choc des corps*, p. 54. Prix de l'Acad., t. I.

11. *Un nombre quelconque de billes égales, juxtaposées en ligne droite sur une table bien unie, sont liées entre elles par des fils inextensibles et d'égale longueur; on écarte brusquement la première bille en lui imprimant une vitesse connue suivant la droite des centres, et l'on demande le temps qui doit s'écouler avant que la dernière bille soit mise en mouvement.*

Soient n le nombre des billes, α la longueur de chacun des fils de jonction et β la vitesse imprimée à la première bille.

Le temps cherché est

$$\frac{n(n-1)}{2}\frac{\alpha}{\beta}.$$

12. *Un nombre quelconque de sphères sont rangées en ligne droite entre deux autres sphères de masses connues m, m'; on imprime à la sphère m une vitesse donnée a, vers la sphère voisine. Trouver quelles doivent être les masses des sphères intermédiaires pour que la vitesse a' communiquée au dernier corps soit un maximum, et déterminer la limite vers laquelle converge cette vitesse maximum, lorsque le nombre des sphères intermédiaires croît indéfiniment.*

Tous les corps considérés ici sont parfaitement élastiques.

On trouve que la masse de chacune des sphères intermédiaires doit être une moyenne géométrique entre celles des deux sphères adjacentes; et si l'on nomme n le nombre des sphères intermédiaires, on obtient entre les vitesses la relation

$$\frac{a'}{a}=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{m}{m'}\right)^{-\frac{1}{n+1}}\right]^{-(n+1)}.$$

Lorsque le nombre des sphères croît indéfiniment, ce rapport tend vers la limite $\frac{a'}{a}=\sqrt{\frac{m}{m'}}$. En effet,

$$\left(\frac{m}{m'}\right)^{-\frac{1}{n+1}}=e^{-\frac{1}{n+1}\log\frac{m}{m'}}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}\log\frac{m}{m'}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}\log\frac{m}{m'}\right)^2-\ldots;$$

en sorte que, si l'on se borne aux deux premiers termes de ce développement, il vient

$$\lim \frac{a'}{a} = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2} \log \frac{m}{m'}\right)^{-(n+1)}$$

$$= e^{\frac{1}{2} \log \frac{m}{m'}} = \sqrt{\frac{m}{m'}}.$$

On montrera sans peine que les termes négligés s'évanouissent à la limite.

13. *Une sphère dépourvue de toute élasticité vient heurter contre une autre sphère en repos et pareillement privée d'élasticité; on connaît la vitesse de la première sphère à l'instant du choc et l'angle que sa direction fait avec la ligne des centres. Déterminer la vitesse du premier corps après le choc.*

Soient α l'angle donné, a la vitesse de la première sphère avant le choc, v sa vitesse après le choc, m sa masse et m' celle de l'autre sphère.

On trouve

$$v = a \left[\sin^2\alpha + \frac{m^2}{(m+m')^2} \cos^2\alpha\right]^{\frac{1}{2}}.$$

14. *Deux sphères* A, B, *de masses égales et animées d'une même vitesse* a, *viennent à se heurter de telle sorte qu'à l'instant du choc la ligne des centres coïncide avec la direction que suivait la sphère* B; *on connaît l'angle* α *de leurs directions primitives et leur élasticité commune* e. *Trouver les vitesses des deux sphères après le choc, et déterminer la valeur de l'angle* α *qui rend maximum la vitesse de la sphère* A.

Soient u et v les vitesses des deux sphères A et B après le choc.

On trouve

$$u^2 = \frac{1}{4} a^2 [1 + e + (1 - e) \cos\alpha]^2 + a^2 \sin^2 \alpha,$$

$$v^2 = \frac{1}{4} a^2 [1 - e + (1 + e) \cos\alpha]^2.$$

La vitesse u est la plus grande possible lorsque

$$\cos\alpha = \frac{1 - e}{3 - e}.$$

15. *Trois sphères parfaitement élastiques* A, B, C *sont placées aux trois sommets d'un triangle connu. Trouver le rapport qui doit exister entre les masses des trois corps pour que la sphère* A, *lancée obliquement sur la sphère* B, *soit réfléchie sur la sphère* C *et revienne à sa position primitive.*

On suppose qu'à l'instant où deux sphères se choquent la ligne de leurs centres est perpendiculaire au côté opposé du triangle, et que les diamètres des sphères sont très-petits par rapport aux côtés du triangle.

Soient α, β, γ les angles du triangle qui correspondent aux sphères A, B, C, et m, m', m'' les masses de ces sphères.

Les relations cherchées sont les suivantes :

$$\frac{m}{m'} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha - \gamma)}, \quad \frac{m}{m''} = \frac{\sin\gamma}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

16. *Une sphère en mouvement* A *vient heurter une sphère en repos* B. *Déterminer l'angle* θ *que la direction de la sphère* A *avant le choc doit faire avec la ligne des centres* AB, *pour que la déviation* φ *que cette sphère éprouve dans le choc, soit la plus grande possible. On connaît l'élasticité commune aux deux corps, ainsi que le rapport* n *de la masse de la sphère* A *à celle de la*

sphère B, *et l'on ne compte l'angle* φ *que jusqu'à* 90 *degrés.*

L'angle cherché θ est fourni par l'équation

$$\operatorname{tang}\theta = \sqrt{\frac{n-e}{n+1}},$$

et la valeur correspondante de la déviation est donnée par la formule

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1+e}{2(n+1)^{\frac{1}{2}}(n-e)^{\frac{1}{2}}}.$$

CHAPITRE II.

MOUVEMENT RECTILIGNE D'UN POINT MATÉRIEL.

Considérons un point matériel qui se meut suivant une ligne droite, et soient

v la vitesse de ce mobile;

x sa distance à une origine fixe prise sur la droite qu'il parcourt;

f la force accélératrice qui le sollicite et qui sera positive si elle tend à accroître la distance x;

t l'époque considérée, comptée à partir d'un instant déterminé.

Toutes les circonstances du mouvement sont renfermées dans les deux équations

$$\frac{dx}{dt}=v, \quad \frac{dv}{dt}=f,$$

que l'on peut écrire encore

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f, \quad v\frac{dv}{dx}=f.$$

Ces équations ont été données pour la première fois par Varignon, en l'année 1700, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* (p. 22); mais il faut observer qu'à cette époque Newton (*) avait déjà publié depuis longtemps ses recherches géométriques sur le mouvement rectiligne produit par des forces variables.

(*) *Principia*, lib. I, sect. VII, et lib. II, sect. I.

La formule $v\,dv = f\,dx$ nous montre que la dérivée du carré de la vitesse, $\frac{d.v^2}{dx}$, est proportionnelle à la force accélératrice. Néanmoins, Daniel Bernoulli (*) pensait que l'on ne devait pas regarder cette loi comme seule possible, et que la force accélératrice pourrait bien être proportionnelle à la dérivée d'une autre puissance de la vitesse. Euler (**) rejeta l'opinion de Bernoulli, et s'efforça de prouver que la loi du carré de la vitesse est nécessaire; enfin d'Alembert (***) fit voir que la vérité de cette loi dépend uniquement du sens que l'on attache au mot *force accélératrice*.

Résoudre un problème quelconque du mouvement rectiligne revient à déterminer les relations qui existent entre les quantités x, v, f, t, dont une seule est arbitraire. Or, comme les équations générales du mouvement rectiligne ne nous donnent que deux relations, il faut que dans l'énoncé du problème soit comprise une autre relation de la forme

$$\varphi(x, v, f, t) = 0;$$

alors seulement nous aurons trois équations entre nos quatre variables.

La fonction φ pourra renfermer deux, trois ou quatre variables. Ces trois cas constituent trois genres de problèmes; d'après la théorie des combinaisons, le premier genre admet six espèces, le deuxième quatre et le troisième une seule espèce. Parmi ces onze espèces de problèmes, les plus intéressantes, au point de vue physique, sont celle où la fonction φ contient les deux variables x et f,

(*) *Commentarii Petrop.*, 1726, p. 126.
(**) *Mechanica*, t. I, p. 62 et suiv.
(***) *Traité de Dynamique.*

et celle où cette fonction contient les trois variables x, f et v. A la première répondra la première Section de ce Chapitre, où nous considérerons le mouvement dans le vide; à la seconde répondra la seconde Section, où nous considérerons le mouvement dans un milieu résistant.

SECTION I.

MOUVEMENT DANS LE VIDE.

1. *Une molécule est placée en un point duquel émane une force répulsive et proportionnelle à la $n^{ième}$ puissance de la distance. Déterminer la vitessse dont le mobile est animé lorsqu'il a parcouru un espace donné et le temps qu'il a mis à parcourir cet espace.*

Soient μ la force répulsive à l'unité de distance et x la distance du mobile au centre des forces.

On a

$$v\frac{dv}{dx} = \mu x^n.$$

Si l'on intègre en observant que v est nul lorsque $x = 0$, il vient

$$v^2 = \frac{2\mu}{n+1} x^{n+1}.$$

Cette équation fait connaître la vitesse du mobile lorsqu'il a parcouru l'espace x.

On a d'ailleurs

$$\frac{dx}{dt} = v = \sqrt{\frac{2\mu}{n+1}} x^{\frac{n+1}{2}}$$

$$dt = \sqrt{\frac{n+1}{2\mu}} x^{-\frac{n+1}{2}} dx,$$

et si l'on prend l'instant du départ pour origine du temps,

$$t = \frac{2}{1-n}\sqrt{\frac{1+n}{2\mu}}\, x^{\frac{1-n}{2}}.$$

EULER, *Mechanica*, t. I, p. 125.

2. *Un point matériel est attiré vers un centre fixe par une force inversement proportionnelle à la $n^{\text{ième}}$ puissance de la distance. Trouver quel doit être le nombre n pour que la vitesse que le mobile acquiert en venant vers le centre d'une distance infinie à la distance a, soit égale à celle qu'il aurait acquise en venant de la distance a à la distance $\frac{1}{4}a$.*

Soient v_1 la vitesse acquise dans le premier mouvement, v_2 la vitesse acquise dans le second mouvement, x la distance du mobile au centre d'attraction et μ l'attraction exercée à l'unité de la distance.

On a

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{\mu}{x^n};$$

d'où

$$v_1^2 = -2\mu\int_\infty^a \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{2\mu}{(n-1)a^{n-1}},$$

$$v_2^2 = -2\mu\int_a^{\frac{1}{4}a} \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{2\mu}{n-1}\left(\frac{4^{n-1}}{a^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right).$$

Puisque les vitesses v_1 et v_2 doivent être égales,

$$1 = 4^{n-1} - 1,$$

$$n = \frac{3}{2}.$$

3. *Un point matériel placé sur l'une des diagonales d'un carré, près du centre de cette figure, est attiré vers les quatre sommets par des forces égales et fonctions de la distance. Déterminer la durée des petites oscillations que le point exécute autour de sa position d'équilibre.*

Soient $2a$ la longueur d'une diagonale, x la distance du mobile au centre du carré, r sa distance à chacune des extrémités de la diagonale sur laquelle il ne se meut point, et $\varphi(r)$ l'attraction de chacun des sommets à la distance r.

On a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\varphi(r)\frac{x}{r} + \varphi(a-x) - \varphi(a+x).$$

Développons le second membre par la formule de Taylor suivant les puissances ascendantes de x. Comme cette distance x est fort petite, nous pouvons négliger ses puissances supérieures à la première. Alors l'équation se réduit à celle-ci :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\left[\frac{\varphi(a)}{a} + \varphi'(a)\right]x,$$

ou, posant $2\left[\frac{\varphi(a)}{a} + \varphi'(a)\right] = \mathrm{K}$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mathrm{K}.x.$$

Multiplions les deux membres par $2\frac{dx}{dt}$ et intégrons; il vient

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\mathrm{K}x^2 + \text{const.},$$

et si nous nommons β la valeur initiale de x,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = K(\beta^2 - x^2),$$

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{K}}\frac{dx}{\sqrt{\beta^2 - x^2}},$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{K}}\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{\beta},$$

$$x = \beta\cos(t\sqrt{K}).$$

On voit, par cette dernière formule, que la distance x oscille entre les valeurs β et $-\beta$, et que la durée d'une oscillation est

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{K}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{\varphi(a)}{a} + \varphi'(a)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

4. *Deux points matériels* A *et* B *s'attirent proportionnellement à leur distance; ils sont d'abord maintenus immobiles dans une position donnée, puis on les abandonne à leur attraction. Déterminer leurs positions et celle de leur centre de gravité à un instant donné.*

L'attraction de A sur B à l'unité de distance est égale à μ' et celle de B sur A est égale à μ.

Soient x et x' les distances des mobiles A et B à un point fixe O pris sur le prolongement de la droite BA.

Les équations du mouvement sont ici

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu(x' - x),$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -\mu'(x' - x).$$

Multiplions ces équations respectivement par μ' et par μ, puis ajoutons les résultats; il vient

$$\mu'\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{d^2x'}{dt^2} = 0.$$

Si l'on prend l'origine du temps à l'instant où le mouvement commence, l'intégrale est, sans constante,

$$\mu'\frac{dx}{dt}+\mu\frac{dx'}{dt}=0,$$

et si l'on désigne par a, a' les valeurs initiales de x, x', on obtient, par une seconde intégration,

$$(1)\qquad \mu' x+\mu x'=\mu' a+\mu a'.$$

Retranchons l'une de l'autre nos deux premières équations, et posons

$$x'-x=z;$$

il vient

$$\frac{d^2z}{dt^2}+(\mu'+\mu)z=0.$$

Intégrons en observant que $\frac{dz}{dt}$ est nul lorsque $z=a'-a$; nous obtenons

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=(\mu'+\mu)[(a'-a)^2-z^2],$$

$$dt=-\frac{1}{\sqrt{\mu'+\mu}}\frac{dz}{\sqrt{(a'-a)^2-z^2}},$$

$$t=\frac{1}{\sqrt{\mu'+\mu}}\operatorname{arc}\cos\frac{z}{a'-a}.$$

ou

$$(2)\qquad x'-x=(a'-a)\cos\left(t\sqrt{\mu'+\mu}\right).$$

Les équations (1) et (2) nous donnent

$$x=\frac{\mu' a+\mu a'}{\mu'+\mu}-\frac{\mu(a'-a)}{\mu'+\mu}\cos\left(t\sqrt{\mu'+\mu}\right),$$

$$x'=\frac{\mu' a+\mu a'}{\mu'+\mu}+\frac{\mu'(a'-a)}{\mu'+\mu}\cos\left(t\sqrt{\mu'+\mu}\right).$$

Soient m, m' les masses des deux mobiles A, B, et $\bar{x}$ la distance de leur centre de gravité au point O.

Nous avons

$$(m+m')\bar{x} = mx + m'x'$$
$$= \frac{m'+m}{\mu'+\mu}(\mu' a + \mu a') + \frac{\mu' m' - \mu m}{\mu'+\mu}(a'-a)\cos(t\sqrt{\mu'+\mu}).$$

Dans le cas où les attractions μ et μ' sont proportionnelles aux masses m' et m, cette équation devient simplement

$$\bar{x} = \frac{\mu' a + \mu a'}{\mu'+\mu};$$

d'où l'on voit que le centre de gravité du système reste alors immobile pendant toute la durée du mouvement.

5. *Un point matériel, soustrait à l'action de la pesanteur, est placé à l'extrémité de l'axe d'un tube cylindrique qui se prolonge indéfiniment; les parois de ce tube sont très-minces, et la matière qui les compose est douée d'une force attractive inversement proportionnelle au carré de la distance. Déterminer la vitesse acquise par le point matériel lorsqu'il a parcouru un espace donné sur l'axe du tube.*

Soient r le rayon du tube, ε l'épaisseur des parois, ρ leur densité, x la distance du mobile à l'extrémité de l'axe et μ l'attraction de l'unité de masse à l'unité de distance.

Le volume de la petite portion des parois qui est comprise entre deux plans perpendiculaires à l'axe et dont les distances au mobile sont s et $s+ds$, a pour expression

$$2\pi r\varepsilon ds;$$

l'attraction que cette portion du tube exerce sur le mobile

suivant l'axe est

$$2\pi\mu\rho r\varepsilon ds \frac{1}{s^2+r^2}\cdot\frac{s}{\sqrt{s^2-r^2}}.$$

Par conséquent,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\pi\mu\rho r\varepsilon \int_{-x}^{x} \frac{sds}{(s^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 2\pi\mu\rho r\varepsilon \left[-\frac{1}{\sqrt{s^2+r^2}}\right]_{-x}^{x} = \frac{2\pi\mu\rho r\varepsilon}{\sqrt{x^2+r^2}}.$$

Multipliant par $2\frac{dx}{dt}$ et intégrant,

$$v^2 = 4\pi\mu\rho r\varepsilon \log\left(x+\sqrt{x^2+r^2}\right) + \text{const.}$$

On détermine la constante par la condition que v soit nul en même temps que x, et il vient

$$v^2 = 4\pi\mu\rho r\varepsilon \log\frac{x+\sqrt{x^2+r^2}}{r}.$$

6. *Une bille pesante est lancée d'une hauteur de 20 mètres contre un plan horizontal; elle rebondit de 10 mètres, retombe de nouveau et rebondit de 4 mètres. Trouver l'élasticité de la bille et la vitesse avec laquelle elle a été lancée.*

Soient a la vitesse imprimée au mobile, v la vitesse qu'il possède à la fin de sa première chute et e son élasticité.

Nous avons

$$v^2 = a^2 + 40g.$$

Au commencement du premier bond, la vitesse du mobile sera ev, et puisque cette vitesse ne devient nulle qu'après une ascension de 10 mètres,

$$e^2v^2 = 20g.$$

Au commencement du deuxième bond, la vitesse sera $e^2 v$, et puisqu'elle n'est détruite que par une ascension de 4 mètres,

$$e^4 v^2 = 8g.$$

Ces trois équations nous donnent

$$e = \sqrt{\frac{2}{5}}, \quad a = \sqrt{10g} \text{ ou à peu près } 9^m,90 \text{ par seconde.}$$

7. *Un point matériel se meut en ligne droite sous l'action d'une force attractive dirigée vers un centre fixe et proportionnelle à la $n^{ième}$ puissance de la distance; on connaît la vitesse β que le mobile acquiert en arrivant à la distance a du centre. Trouver à quelle distance du centre le mouvement a commencé.*

Soient μ l'attraction à l'unité de distance et z la distance cherchée.

On trouve

$$z^{n+1} = a^{n+1} + \frac{n+1}{2\mu}\beta^2.$$

EULER, *Mechan.*, t. I, p. 109.

8. *Un point matériel tombe sur un centre fixe qui l'attire en raison inverse du cube de la distance; on connaît la distance initiale a, et l'on demande la durée de la chute* T.

Si l'on représente par μ l'attraction à l'unité de distance, on trouve

$$T = \frac{a^2}{\sqrt{\mu}}.$$

9. *Un point matériel arrive d'une distance infinie vers un centre fixe qui l'attire en raison inverse du carré de la distance. Déterminer la vitesse que possède le mobile à une distance donnée du centre.*

Soient a la distance donnée, v la vitesse cherchée et μ l'attraction à l'unité de distance.

On trouve

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{a}}.$$

10. *Un point matériel est placé en un lieu connu sur la droite qui joint les centres de deux forces attractives, égales et proportionnelles à la distance. Déterminer la position du mobile à une époque donnée, ainsi que la durée des oscillations qu'il exécute autour de sa position d'équilibre.*

Soient a la distance initiale du mobile au point milieu de la ligne des centres, x la distance du mobile au même point à l'époque donnée t, et μ l'attraction de chacun des centres à l'unité de distance.

On trouve

$$x = a \cos\left(t\sqrt{2\mu}\right),$$

et la durée d'une oscillation est

$$\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}}.$$

11. *Un point matériel est placé en un lieu connu sur la droite qui joint les centres de deux forces attractives inversement proportionnelles au carré de la distance; on lance ce corps vers l'un des deux centres, il arrive au point où les attractions sont égales et y reste en repos. Déterminer la vitesse avec laquelle il a été lancé.*

Soient μ et μ' les attractions des deux centres à l'unité de distance, $2a$ et $2a'$ les distances initiales du mobile à ces deux centres, et V la vitesse avec laquelle le mobile est lancé vers le second centre.

On trouve

$$V = \frac{\sqrt{\frac{a'}{a}\mu} - \sqrt{\frac{a}{a'}\mu'}}{\sqrt{a + a'}}.$$

12. *Un point matériel qui se meut suivant une ligne droite est attiré par une force proportionnelle à la distance, vers un centre d'action qui se meut suivant la même droite avec une vitesse constante; on connaît les positions initiales du centre d'action et du point matériel, ainsi que la vitesse constante du premier* β *et la vitesse initiale du second* β'. *Trouver la position du point matériel à une époque donnée.*

Soient a et a' les distances initiales du centre d'action et du point matériel à une origine fixe prise sur le prolongement de la droite qui va du premier point au second, x la distance du point matériel à cette origine à l'époque t et μ l'attraction à l'unité de distance.

On trouve

$$x = a + \beta t + \frac{\beta' - \beta}{\sqrt{\mu}} \sin(t\sqrt{\mu}) + (a' - a)\cos(t\sqrt{\mu}).$$

RICCATI, *Bonon. Institut.*, t. VI, p. 138; 1873.

13. *Les données restent les mêmes que dans le problème précédent, à l'exception de la force qui est répulsive. Trouver la position du point matériel à une époque donnée.*

On trouve

$$x = a + \beta t - [\sqrt{\mu}(a - a') + (\beta - \beta')]\frac{e^{t\sqrt{\mu}}}{2\sqrt{\mu}}$$
$$- [\sqrt{\mu}(a - a') - (\beta - \beta')]\frac{e^{-t\sqrt{\mu}}}{2\sqrt{\mu}}.$$

RICCATI, *Ib.*, t. VI, p. 151.

14. *On suppose que dans le problème* 12 *la vitesse du centre d'action soit uniformément accélérée, au lieu d'être constante. Trouver la position du point matériel à une époque donnée.*

Si l'on nomme β la vitesse initiale du centre d'action et f l'accroissement de cette vitesse pendant l'unité de temps, on trouve

$$x = a - \frac{f}{\mu} + \beta t + \frac{1}{2} f t^2 + \frac{\beta' - \beta}{\sqrt{\mu}} \sin(t\sqrt{\mu}) + \left(a' - a + \frac{f}{\mu}\right) \cos(t\sqrt{\mu}).$$

RICCATI, *Ib.*, p. 168.

15. *Les données restent les mêmes que dans le problème précédent, à l'exception de la force qui est répulsive. Déterminer la position du point matériel à une époque donnée.*

On trouve

$$x = a + \frac{f}{\mu} + \beta t + \frac{1}{2} f t^2 - \left[\sqrt{\mu}\left(a - a' + \frac{f}{\mu}\right) + (\beta - \beta')\right] \frac{e^{t\sqrt{\mu}}}{2\sqrt{\mu}} - \left[\sqrt{\mu}\left(a - a' + \frac{f}{\mu}\right) - (\beta - \beta')\right] \frac{e^{-t\sqrt{\mu}}}{2\sqrt{\mu}}.$$

RICCATI, *Ib.*, p. 182.

16. *Un point matériel est abandonné en un lieu connu à l'attraction d'une plaque mince et indéfinie en tous sens, dont chaque point l'attire en raison inverse du carré de la distance. Déterminer le temps nécessaire au mobile pour arriver sur la plaque.*

Soient ε l'épaisseur de la plaque, ρ sa densité, a la distance initiale du mobile à la plaque, et μ l'attraction de l'unité de masse de la plaque à l'unité de distance.

Le temps cherché est

$$\sqrt{\frac{a}{\pi\rho\varepsilon\mu}}.$$

17. *Un point matériel est placé dans le plan d'un anneau mince et tout près du centre; la densité de l'anneau et sa section normale sont partout les mêmes, la matière dont il se compose est douée d'un pouvoir répulsif inversement proportionnel au carré de la distance. Déterminer la position du point matériel à une époque donnée, et trouver la durée des petites oscillations qu'il exécute autour de sa position d'équilibre.*

Soient a le rayon de l'anneau, k l'aire de sa section normale, ρ sa densité, l la distance initiale du point matériel au centre, x la distance des deux mêmes points à l'époque t, et μ la répulsion de l'unité de masse de l'anneau à l'unité de distance.

On trouve

$$x = l\cos\left(\frac{t}{a}\sqrt{\pi k\rho\mu}\right),$$

et la durée d'une oscillation est

$$a\sqrt{\frac{\pi}{k\rho\mu}}.$$

18. *Un point matériel est abandonné à l'attraction d'un disque mince et homogène, dont toutes les molécules sont douées d'un pouvoir attractif inversement proportionnel au carré de la distance; la position initiale du point matériel est connue, et se trouve sur la perpendiculaire au plan du disque qui passe par le centre de ce corps. Déterminer la vitesse acquise par le mobile lorsqu'il arrive à la surface du disque.*

Soient ρ la densité du disque, ε son épaisseur, a son

rayon, b sa distance initiale au point matériel, et μ l'attraction de l'unité de masse du disque à l'unité de distance.

La vitesse cherchée V est donnée par la formule

$$V^2 = 4\pi\rho\varepsilon\mu\left(a + b - \sqrt{a^2 + b^2}\right).$$

19. *Une bille dont on connaît l'élasticité tombe d'une hauteur donnée sur un plan horizontal. Trouver tout l'espace que la bille doit parcourir avant d'arriver au repos.*

Soient e l'élasticité de la bille et a sa hauteur initiale au-dessus du plan.

L'espace cherché est égal à $\frac{1 + e^2}{1 - e^2} a$.

20. *Deux billes parfaitement élastiques sont placées à des hauteurs différentes sur une même verticale; au même instant on les abandonne à leurs poids, elles tombent sur un plan incliné de 45 degrés à l'horizon, et continuent aussitôt leur route sur un plan horizontal parfaitement poli qui fait suite au plan incliné. Déterminer la distance que les deux billes doivent parcourir sur le plan horizontal avant de se rencontrer.*

Si l'on nomme a et a' les distances initiales des deux billes au-dessus du plan horizontal, la distance cherchée sera

$$2\sqrt{aa'}.$$

21. *Deux points pesants sont situés à des hauteurs différentes sur la même verticale; au même instant on abandonne le point supérieur à son poids, et on lance le point inférieur de bas en haut avec une vitesse donnée β. Déterminer l'époque et le lieu de la rencontre des deux points.*

Soient a la distance initiale des deux mobiles, x la distance de leur point de rencontre à la position initiale du mobile supérieur et t l'époque de la rencontre, comptée à partir de l'instant où le mouvement commence.

On trouve

$$x = \frac{ga^2}{2\beta^2}, \quad t = \frac{a}{\beta}.$$

KURDWANOWSKI, *Mém. de l'Acad. des Sciences de Berlin*, 1755, p. 394.

22. *Un mobile part du point* A, *sans vitesse initiale, sollicité par une force accélératrice constante a dans la direction* X. *Au même instant un second mobile part du point* B, *sans vitesse initiale, sous l'action de la force b qui agit dans la direction* Y. *On demande de déterminer l'instant où la distance des deux mobiles est un minimum, et la grandeur de cette plus petite distance.*

Les droites X *et* Y *ne sont pas nécessairement dans un même plan.*

Soient A′ le pied de la perpendiculaire abaissée du point B sur la droite X; B′ le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur Y; F la force résultante des forces a et b transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point.

La distance des deux mobiles est un minimum après un temps égal à la racine carrée de

$$2\,\frac{a\overline{AA'} + b\overline{BB'}}{F^2};$$

cette plus petite distance est la racine carrée de

$$\overline{AB}^2 - \frac{(a\overline{AA'} + b\overline{BB'})^2}{F^2}.$$

Soient II′ la perpendiculaire commune aux deux droites X et Y, et θ l'angle compris entre deux parallèles à ces droites.

Le carré de la plus petite distance des mobiles pourra s'exprimer ainsi

$$\overline{\mathrm{II}'}^2 + \frac{(b\overline{\mathrm{AI}} - a\overline{\mathrm{BI}'})^2 \sin^2\theta}{\mathrm{F}^2}.$$

23. Si l'on se pose le même problème pour deux mobiles animés de vitesses constantes a, b, on trouve, en nommant F la résultante de deux vitesses parallèles à a et b, que la distance des mobiles est un minimum à l'époque

$$t = \frac{a\overline{\mathrm{AA}'} + b\overline{\mathrm{BB}'}}{2\mathrm{F}},$$

et que cette plus courte distance a la même expression que dans le problème précédent.

Dans le cas où les deux mobiles parcourent des droites situées dans le même plan, comme feraient deux vaisseaux, la plus courte distance est

$$\frac{\sin\theta}{\mathrm{F}}(b\overline{\mathrm{AI}} - a\overline{\mathrm{BI}}).$$

SECTION II.

MOUVEMENT DANS UN MILIEU RÉSISTANT.

Lorsqu'un point matériel traverse un milieu résistant, la force retardatrice est une fonction de la vitesse du mobile et de la densité du milieu. La nature de cette fonction ne peut être déterminée que par l'expérience. Dans les recherches mathématiques, pour simplifier les calculs et à titre d'approximation probable, on prend une fonction de la forme $k\rho\Omega$, où ρ représente la densité du milieu,

Ω une certaine fonction de la vitesse du point, et k un coefficient constant qui dépend, pour chaque milieu, de l'adhérence et du frottement des molécules.

Newton et Wallis nous ont donné les premiers travaux mathématiques sur le mouvement des corps dans les milieux résistants. Les profondes recherches de Newton furent publiées en l'année 1687 dans le second livre des *Principes*. La même année, Wallis, qui de son côté était arrivé à des résultats précieux sur cette matière, communiqua ses réflexions à la Société Royale de Londres, et les fit insérer dans les *Transactions philosophiques*. Deux ans plus tard, parut dans les *Acta eruditorum* un Mémoire de Leibnitz, où cet illustre géomètre développe ses opinions sur la résistance des milieux, et déclare les avoir présentées à l'Académie royale des Sciences l'année même des découvertes de Newton. Huyghens aussi s'est occupé de cette question à la fin de son *Discours sur la cause de la pesanteur* (1690). Tous ces travaux et d'autres encore ont été soumis à l'analyse et discutés avec soin par Varignon, dans une série de Mémoires qui font partie des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour les années 1707, 1708, 1709, 1710 et 1711. On trouve encore dans le même recueil pour l'année 1731 un beau travail de Bouguer sur le mouvement d'un point matériel dans un milieu qui est lui-même en mouvement.

De toutes ces recherches il résulte que dans le cas des petites vitesses la résistance leur est sensiblement proportionnelle, et que pour les grandes vitesses elle croît plus rapidement que leur carré.

1. *Un corps est attiré en raison inverse du cube de la distance, vers un centre fixe entouré lui-même d'une atmosphère dont la densité est inversement proportionnelle au cube de la distance à ce centre, et dont la ré-*

sistance varie comme le carré de la vitesse. Déterminer la vitesse du corps à une distance quelconque du centre.

Soient a la distance du mobile au centre à l'instant où le mouvement commence, x cette distance à l'époque t, k la résistance du milieu pour l'unité de vitesse à l'unité de distance, et μ l'attraction à l'unité de distance.

On a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{x^3} + \frac{k}{x^3}\frac{dx^2}{dt^2},$$

ou

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2\mu}{x^3}\frac{dx}{dt} + \frac{2k}{x^3}\frac{dx^3}{dt^3},$$

$$\frac{d.}{dt}\left(\frac{dx^2}{dt^2}\right) = \mu\frac{d.}{dt}\left(\frac{1}{x^2}\right) - k\frac{dx^2}{dt^2}\frac{d.}{dt}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{x^2} = z,$$

il vient

$$dv^2 + kv^2dz = \mu dz,$$

équation qui a pour intégrale

$$v^2 = Ce^{-kz} + \frac{\mu}{k} = Ce^{-\frac{k}{x^2}} + \frac{\mu}{k}.$$

On détermine la constante C par la condition que v soit nul lorsque $x = a$; alors on trouve

$$v^2 = \frac{\mu}{k}\left[1 - e^{-k\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}\right)}\right].$$

2. *Une bille pesante, parfaitement élastique, tombe d'une hauteur connue sur un plan horizontal, et rebondit plusieurs fois de suite dans un milieu homogène, dont la résistance est proportionnelle au carré de la*

vitesse. Déterminer la hauteur à laquelle la bille s'élèvera après un nombre donné de réflexions.

On prendra en considération le poids du milieu déplacé par la bille.

Soient a_1 la hauteur initiale d'où tombe la bille, et généralement a_{n+1} la hauteur à laquelle elle s'élève après n réflexions. Nommons B le volume de la bille, ρ la densité de ce corps, ρ' celle du milieu et k la résistance du milieu pour une vitesse égale à l'unité.

Le poids d'un corps dans un milieu pesant est égal au poids de ce corps dans le vide moins le poids du milieu déplacé; par conséquent, si nous considérons la bille dans sa descente, et que nous prenions le point le plus élevé d'où elle descend pour origine de la distance x, nous aurons

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{Bg\rho - Bg\rho'}{B\rho} - kv^2,$$

ou, posant $g\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right) = g'$,

$$\frac{vdv}{g' - kv^2} = dx.$$

Intégrons, en observant que v et x sont nuls à l'instant où la chute commence; il vient

$$\frac{1}{2k}\log\frac{g'}{g' - kv^2} = x.$$

Ainsi la vitesse v_n du mobile à l'instant de son $n^{ième}$ choc vérifie l'équation

$$(1) \qquad \frac{1}{2k}\log\frac{g'}{g' - kv_n^2} = a_n, \quad \frac{k}{g'}v_n^2 = 1 - e^{-2ka_n}.$$

Considérons actuellement l'ascension qui suit ce $n^{ième}$ choc, et désignons par x la hauteur du mobile au-dessus

du plan. Nous avons

$$v\frac{dv}{dx} = -g' - kv^2$$

ou

$$\frac{vdv}{g' + kv^2} = -dx,$$

équation qui a pour intégrale

$$\frac{1}{2k}\log\left(1 + \frac{k}{g'}v^2\right) = a_{n+1} - x.$$

Si l'on considère en particulier l'instant où l'ascension commence, on aura

$$\frac{1}{2k}\log\left(1 + \frac{k}{g'}v_n^2\right) = a_{n+1},$$

$$(2) \qquad \frac{k}{g'}v_n^2 = e^{2ka_{n+1}} - 1.$$

Posons, pour abréger,

$$e^{2ka_{n+1}} - 1 = u_{n+1},$$
$$e^{2ka_n} - 1 = u_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Alors les équations (1) et (2) nous donnent

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1;$$

d'où l'on voit que $\frac{1}{u_{n+1}}$ est le $n^{ième}$ terme d'une progression arithmétique dont le premier terme est $\frac{1}{u_1}$ et dont la raison est l'unité.

Il s'ensuit

$$u_{n+1} = \frac{u_1}{nu_1 + 1},$$

et si l'on remplace u_1, u_{n+1} par leurs valeurs,

$$e^{2ka_{n+1}} - 1 = \frac{e^{2ka_1} - 1}{ne^{2ka_1} - n + 1},$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2k} \log \frac{(n+1)e^{2ka_1} - n}{ne^{2ka_1} - n + 1}.$$

Telle est la hauteur du $n^{ième}$ bond.

Quand on suppose que la bille arrive d'une distance infinie, a_1 est infini, et la valeur précédente se réduit à celle-ci

$$a_{n+1} = \frac{1}{2k} \log \frac{n+1}{n}.$$

EULER, *Mechan.*, t. I, p. 192.

3. *Un centre d'attraction est entouré d'un milieu dont la densité varie avec la distance suivant une loi connue, et dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. Déterminer quelle doit être l'attraction de ce centre pour qu'un point matériel abandonné à son action emploie toujours le même temps pour l'atteindre, quel que soit le point de départ.*

Soient a la distance du centre au point matériel à l'instant où le mouvement commence, x cette distance à l'époque t, F la force d'attraction et ρ la densité du milieu, laquelle est une fonction de x.

L'équation du mouvement est ici

$$v \frac{dv}{dx} = -F + \rho v^2,$$

ou, multipliant par $2e^{-2\int \rho dx}$,

$$d.\left(e^{-2\int \rho dx} v^2\right) = -2e^{-2\int \rho dx} F dx,$$

$$e^{-2\int \rho dx} v^2 = -2\int e^{-2\int \rho dx} F dx + \text{const.}$$

On détermine la constante par la condition que v soit nul lorsque $x = a$; alors, si l'on pose, pour abréger,

$$X = 2\int_0^x e^{-2\int \rho\, dx} F\, dx, \quad A = 2\int_0^a e^{-2\int \rho\, dx} F\, dx,$$

il vient

$$v = \sqrt{A - X}\, e^{\int \rho\, dx},$$

$$dt = \frac{e^{-\int \rho\, dx}\, dx}{\sqrt{A - X}}.$$

Posons encore

$$(1) \qquad e^{\int \rho\, dx} \frac{dX}{dx} = P;$$

nous aurons

$$dt = \frac{dX}{P\sqrt{A - X}},$$

et la durée de la chute du corps sera donnée par la formule

$$t = \int_0^A \frac{dX}{P\sqrt{A - X}}.$$

Puisque le second membre doit être indépendant de la distance initiale, ou, ce qui est la même chose, indépendant de A, il faut que la quantité comprise sous le signe $\int$ soit du degré 0 en A, X et dX. Pour qu'il en soit ainsi, P doit être une fonction homogène et du degré $\frac{1}{2}$ par rapport à X et A; mais, d'après l'équation (1), P est indépendant de A, donc la seule valeur qui puisse convenir à cette quantité est

$$P = \frac{\sqrt{X}}{\beta},$$

β désignant une constante.

Ceci posé, l'équation (1) nous donne

$$\beta \frac{dX}{\sqrt{X}} = e^{-\int \rho\, dx} dx,$$

et comme X et x sont nuls en même temps,

$$2\beta \sqrt{X} = \int_0^x e^{-\int \rho\, dx} dx,$$

Élevons au carré, puis remplaçons X par sa valeur; nous trouvons

$$8\beta^2 \int_0^x e^{-2\int \rho\, dx} F\, dx = \left[\int_0^x e^{-\int \rho\, dx} dx\right]^2.$$

De la différentielle de cette équation,

$$8\beta^2 e^{-2\int \rho\, dx} F\, dx = 2 e^{-\int \rho\, dx} \int_0^x e^{-\int \rho\, dx} dx,$$

on tire la valeur cherchée,

$$F = \frac{1}{4\beta^2} e^{\int \rho\, dx} \int_0^x e^{-\int \rho\, dx} dx.$$

Lorsque $\rho = 0$, ce qui est le cas du vide parfait,

$$F = \frac{x}{4\beta^2}.$$

Lorsque ρ est une constante, ce qui est le cas d'un milieu homogène,

$$F = \frac{1}{4\beta^2 \rho}\left(e^{\rho x} - 1\right).$$

EULER, *Mechan.*, t. I, p. 220.

4. *Un centre de forces* C *est animé d'un mouvement uniforme suivant la direction* OPCA; *il repousse en raison directe de la distance un point matériel* P *qui se*

meut suivant la même droite, dans un milieu homogène et dont la résistance est proportionnelle à la vitesse.

Déterminer la position du point matériel à une époque donnée.

Soient a et a' les distances initiales du centre C et du point P à l'origine fixe O, β et β' les vitesses initiales de ces mêmes points, μ la force répulsive à l'unité de distance, k la résistance du milieu pour l'unité de vitesse et x la distance qui sépare le point P de l'origine O à l'époque t.

Si nous convenons de considérer comme positives les vitesses et les distances comptées dans la direction OPCA, et comme négatives les vitesses et les distances comptées dans la direction contraire, le mouvement sera toujours représenté par l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu(a + \beta t - x) - k\frac{dx}{dt},$$

qui, si l'on pose

$$x - a - \frac{\beta k}{\mu} - \beta t = \zeta,$$

peut s'écrire,

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + k\frac{d\zeta}{dt} = \mu\zeta.$$

Nous intégrerons cette équation par la méthode commune des équations linéaires.

Substituons la valeur $\zeta = Ae^{\rho t}$, dans laquelle A et ρ désignent des constantes qu'il s'agit de déterminer. Il vient

$$\rho^2 + k\rho = \mu,$$

équation qui a pour racines

$$\rho' = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4\mu}}{2}, \quad \rho'' = \frac{-k - \sqrt{k^2 + 4\mu}}{2};$$

par conséquent, l'intégrale générale sera

$$\zeta = C' e^{\rho' t} + C'' e^{\rho'' t},$$

c'est-à-dire

$$x = a + \frac{\beta k}{\mu} + \beta t + C' e^{\rho' t} + C'' e^{\rho'' t}.$$

Lorsque t est nul, on doit avoir

$$x = a', \quad \frac{dx}{dt} = \beta';$$

de là il suit que les constantes C' et C'' sont déterminées par les deux équations

$$a' = a + \frac{\beta k}{\mu} + C' + C'', \quad \beta' = \beta + \rho' C' + \rho'' C''.$$

On trouvera ce problème et plusieurs autres du même genre dans les Mémoires du jésuite V. Riccati, *De motu rectilineo corporis attracti aut repulsi à centro mobili; Disquisitio quarta. Comment. Bonon.*, t. VI, p. 212; 1783.

5. *Un point matériel reçoit une vitesse donnée β dans un milieu homogène, dont la résistance est proportionnelle à la racine carrée de la vitesse. Déterminer l'époque à laquelle le point s'arrêtera.*

Si l'on nomme k la résistance du milieu pour l'unité de vitesse et T l'époque cherchée, comptée à partir de l'instant où le mouvement commence, on trouve

$$T = \frac{2}{k}\sqrt{\beta}.$$

6. *Un point pesant est placé dans un milieu homogène dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. Soient t le temps nécessaire à ce point pour acquérir en tombant une vitesse v, et τ le temps qui lui serait nécessaire pour perdre cette même vitesse si on le*

lançait verticalement de bas en haut. Déterminer la relation qui existe entre les deux quantités t et τ.

Si l'on représente par k la résistance du milieu pour l'unité de vitesse, on trouve la relation

$$2t\sqrt{gk} = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \tau\sqrt{gk}\right).$$

7. *Un point matériel, lancé avec une vitesse de* 300 *mètres par seconde, dans un milieu dont la résistance est constante, a perdu la moitié de sa vitesse en parcourant une longueur d'un décimètre. Déterminer le temps employé à parcourir cet espace.*

Le temps cherché est égal à $\frac{1}{2250}$ de seconde.

8. *Un point matériel, parti du repos, est attiré vers un centre fixe par une force d'intensité constante; le mouvement s'exécute dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse et à l'inverse de la distance au centre. Déterminer la vitesse du mobile à une distance quelconque du centre, et trouver la distance pour laquelle cette vitesse est un maximum.*

Soit f la force d'attraction, k la résistance du milieu pour l'unité de vitesse et l'unité de distance au centre, v la vitesse, x la distance du mobile au centre et a la valeur initiale de cette distance.

On trouve généralement

$$v^2 = \frac{2fx^{2k}}{1-2k}\left(a^{1-2k} - x^{1-2k}\right),$$

et la distance qui correspond au maximum de la vitesse est

$$x = (2k)^{\frac{1}{1-2k}}a.$$

9. *Deux points pesants sont placés sur la même verticale dans un milieu homogène dont la résistance est proportionnelle à la vitesse; au même instant, on laisse tomber le corps supérieur, et on lance le corps inférieur de bas en haut suivant la verticale avec une vitesse donnée. Déterminer le temps qui s'écoulera avant que les deux corps se rencontrent.*

Soient a la distance initiale des deux mobiles, β la vitesse imprimée au mobile inférieur, k la résistance du milieu pour l'unité de vitesse et T le temps cherché.

On trouve

$$T = \frac{1}{k} \log \frac{\beta}{\beta - ka}.$$

10. *Un point pesant, d'élasticité connue* E, *tombe sur un plan horizontal, dans un milieu homogène dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse; la vitesse initiale est nulle, et la hauteur du point de départ au-dessus du plan est connue. Déterminer la longueur de tout le chemin qu'il doit parcourir avant d'arriver au repos.*

Si l'on nomme k la résistance du milieu pour l'unité de vitesse, a la hauteur initiale et s la longueur cherchée, on trouve

$$s = a + \frac{1}{k} \log \frac{1 - E^2 e^{-2ka}}{1 - E^2}.$$

BORDONI, *Memorie della Società Italiana*, 1816, p. 162.

CHAPITRE III.

MOUVEMENT QUELCONQUE D'UN POINT MATÉRIEL LIBRE.

SECTION I.

FORCES SITUÉES DANS UN MÊME PLAN ET DIRIGÉES D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE.

Considérons un point matériel qui décrit une courbe plane sous l'action de forces dirigées comme l'on voudra dans le même plan. Si nous nommons x, y les coordonnées de ce point, X la somme des composantes des forces accélératrices suivant l'axe des x, Y la somme des composantes suivant l'axe des y et t l'époque considérée, toutes les circonstances du mouvement seront contenues dans les équations

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y}.$$

Cette méthode, qui consiste à décomposer les forces accélératrices suivant des axes fixes, et ramène ainsi l'étude du mouvement aux formules du mouvement rectiligne, a été donnée pour la première fois par Maclaurin en 1742, dans son *Traité des Fluxions* (vol. I, art. 465 et suiv.). Avant cette époque, toutes les questions étaient résolues par la méthode des composantes tangentielles et normales qui, en général, ne se prête pas aussi bien aux transformations de l'analyse, quoiqu'elle dérive plus immédiatement de la nature même du mouvement curviligne. C'est la marche qu'Euler a suivie dans sa *Mécanique*, publiée en 1736.

La méthode des composantes tangentielles et normales est fondée sur deux formules utiles à connaître.

Soient :

v la vitesse du mobile en un point de sa trajectoire;

s l'arc de la courbe qui se termine au même point;

ρ le rayon de courbure;

T la somme des forces qui sollicitent le mobile, estimées suivant la direction de son mouvement;

N la somme des mêmes forces estimées suivant la normale qui se dirige du côté de la concavité de la courbe.

Le mouvement est représenté par les équations

$$\frac{vdv}{ds} = \mathrm{T}, \quad \frac{v^2}{\rho} = \mathrm{N}.$$

Si l'on remplace dans ces formules $\frac{vdv}{ds}$ et ρ par leurs valeurs bien connues en x, y, t et leurs dérivées, on obtient deux équations différentielles du second ordre qui sont équivalentes aux équations (A).

1. *Un point matériel et pesant décrit la trajectoire* ABCD; *on connaît sa vitesse au point* B, *estimée suivant une perpendiculaire à la corde* BC, *et l'on demande sa vitesse au point* C, *estimée suivant la même direction.*

Prenons la corde BC pour axe des x, et la perpendiculaire qui est dirigée de bas en haut pour axe des y. Soient α l'inclinaison de la corde sur l'horizon, u la composante connue de la vitesse au point B, et u_1 la composante cherchée de la vitesse au point C.

On a

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g\cos\alpha.$$

Si l'on prend l'instant du passage au point B pour ori-

gine du temps, et que l'on intègre deux fois, il vient

$$\frac{dy}{dt} = u - g\cos\alpha . t,$$

$$y = ut - \frac{1}{2} g\cos\alpha . t^2.$$

Ces deux équations générales, appliquées au point C de la trajectoire, nous donnent

$$u_1 = u - g\cos\alpha . t,$$

$$0 = u - \frac{1}{2} g\cos\alpha . t,$$

et l'on en tire

$$u_1 = -u.$$

Ainsi, *quand un projectile lancé dans le vide coupe une droite donnée en deux points, il la traverse avec des vitesses dont les composantes perpendiculaires à la droite sont égales et de sens contraires.*

2. *Un point matériel décrit une parabole autour d'un centre de forces situé à l'intersection de la directrice et de l'axe. Trouver la force qui sollicite le mobile en un point quelconque de sa trajectoire.*

Prenons le centre des forces pour origine des coordonnées, l'axe de la parabole pour axe des x, et la directrice pour axe des y.

Soient p le paramètre, r la distance du mobile à l'origine, et F la force que nous supposerons répulsive.

Le mouvement est représenté par les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Fx}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Fy}{r},$$

d'où l'on tire

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

$$(1) \qquad y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = C.$$

La constante C représente le double de l'aire décrite par le rayon vecteur dans l'unité de temps.

D'un autre côté, l'équation de la parabole

$$y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right)$$

nous donne

$$(2) \qquad y\frac{dy}{dt} = p\frac{dx}{dt},$$

$$y\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = p\frac{d^2x}{dt^2},$$

et si l'on remplace les dérivées secondes par leurs valeurs,

$$(3) \qquad \frac{Fy^2}{r} + \frac{dy^2}{dt^2} = p\frac{Fx}{r}.$$

Éliminons $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ entre les équations (1), (2) et (3). Il vient

$$F = \frac{p^2C^2r}{(px - y^2)^3},$$

ou, d'après l'équation de la parabole,

$$F = \frac{C^2r}{p(p-x)^3}.$$

3. *Un point matériel se meut sous l'action de deux centres fixes qui l'attirent en raison inverse de la distance avec des intensités égales pour des distances égales. On suppose que la vitesse du mobile est constante. Quelle peut être dans cette hypothèse sa trajectoire?*

Prenons pour axe des x la droite qui joint les deux centres, et pour origine le point milieu de cette droite.

Soient $2a$ la distance des deux centres, r et r' les distances du mobile à ces deux points, et μ l'attraction à l'unité de distance.

Les équations du mouvement sont ici

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{r}\frac{a-x}{r} - \frac{\mu}{r'}\frac{a+x}{r'},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu}{r}\frac{y}{r} - \frac{\mu}{r'}\frac{y}{r'}.$$

De plus, on a constamment

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = \text{const.},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Si dans cette relation on remplace les dérivées secondes par leurs valeurs tirées des équations du mouvement, on obtient l'équation différentielle de la trajectoire,

$$\frac{dx}{dt}\left(\frac{a+x}{r'^2} - \frac{a-x}{r^2}\right) + \frac{dy}{dt}\left(\frac{y}{r^2} + \frac{y}{r'^2}\right) = 0,$$

$$\frac{(x+a)\,dx + y\,dy}{(x+a)^2+y^2} + \frac{(x-a)\,dx + y\,dy}{(x-a)^2+y^2} = 0.$$

L'intégrale est

$$\log[(x+a)^2+y^2] + \log[(x-a)^2+y^2] = \text{const.} = \log C',$$

$$[(x+a)^2+y^2][(x-a)^2+y^2] = C'.$$

Cette équation exprime que le produit des distances du mobile aux deux centres d'attraction est constant. Par conséquent, si le mouvement uniforme est possible, la trajectoire sera une lemniscate.

Quand on fait $C = a$, l'équation précédente représente une lemniscate de Jacques Bernoulli. On peut vérifier que le mobile décrira réellement cette courbe d'un mou-

vement uniforme sous l'action des deux centres, s'il est lancé suivant la tangente avec une vitesse égale à $2\sqrt{\frac{\mu}{3}}$.

4. *Un point matériel est attiré par un centre qui se meut en ligne droite avec une vitesse uniforme, et dont le pouvoir attractif est proportionnel à la distance; la vitesse initiale du point matériel est dirigée dans un même plan avec la droite que parcourt le centre d'attraction. Déterminer la position du point matériel à une époque quelconque.*

Prenons pour origine la position initiale du centre d'attraction.

Soient α et β les projections de la vitesse du centre sur les axes des x et des y, a et b les coordonnées initiales du point matériel, p sa vitesse initiale suivant l'axe des x, q sa vitesse initiale suivant l'axe des y, et μ l'attraction à l'unité de distance.

A l'époque t les coordonnées du centre d'attraction seront αt et βt; par conséquent, si l'on représente par x et y les coordonnées du point matériel à la même époque, on aura

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu(\alpha t - x),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \mu(\beta t - y).$$

La première équation peut s'écrire

$$\frac{d^2(x - \alpha t)}{dt^2} + \mu(x - \alpha t) = 0.$$

Sous cette forme on voit tout de suite que l'intégrale est

$$x = A\cos(t\sqrt{\mu}) + B\sin(t\sqrt{\mu}) + \alpha t.$$

On détermine les constantes A et B par la condition que pour $t = 0$ on ait

$$x = a \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = p;$$

il vient

$$A = a \quad \text{et} \quad B = \frac{p - \alpha}{\sqrt{\mu}},$$

d'où

$$x = a\cos(t\sqrt{\mu}) + \frac{p - \alpha}{\mu}\sin(t\sqrt{\mu}) + \alpha t.$$

On trouvera de la même manière

$$y = b\cos(t\sqrt{\mu}) + \frac{q - \beta}{\mu}\sin(t\sqrt{\mu}) + \beta t.$$

5. *Un point matériel décrit une parabole sous l'action de deux forces : l'une, parallèle à l'axe, est inconnue; l'autre, dirigée suivant la perpendiculaire abaissée sur l'axe, est proportionnelle à la longueur de cette perpendiculaire. On donne la vitesse du mobile au sommet de la parabole, et l'on demande de déterminer la force inconnue, ainsi que la position du mobile à une époque quelconque.*

Soient β la vitesse du mobile au sommet de la courbe, μ la force perpendiculaire à l'axe pour l'unité de distance, X la force cherchée, et $y^2 = 2px$ l'équation de la parabole.

Les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\mu y.$$

Si l'on multiplie cette dernière équation par $2\frac{dy}{dt}$ et que

l'on intègre, il vient

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy^2}{dt^2} = \beta^2 - \mu y^2.$$

D'un autre côté, l'équation de la parabole nous donne

$$y\frac{dy}{dt} = p\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{dy^2}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} = p\frac{d^2x}{dt^2},$$

et si l'on remplace les dérivées secondes par leurs valeurs,

$$\frac{dy^2}{dt^2} = \mu y^2 + pX.$$

Cette équation, jointe à l'équation (A), nous fait connaître la valeur de la force X,

$$X = \frac{\beta^2 - 2\mu y^2}{p} = \frac{\beta^2}{p} - 4\mu x.$$

Résolvons la seconde partie du problème.

L'équation (A) peut s'écrire

$$dt = \frac{dy}{\sqrt{\beta^2 - \mu y^2}}.$$

Prenons pour origine du temps l'instant où le mobile passe au sommet de la courbe, et intégrons; il vient

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \operatorname{arc\,sin} \frac{y\sqrt{\mu}}{\beta},$$

$$y = \frac{\beta}{\sqrt{\mu}} \sin(t\sqrt{\mu}),$$

et, par conséquent,

$$x = \frac{y^2}{2p} = \frac{\beta^2}{2p\mu} \sin^2(t\sqrt{\mu}) = \frac{\beta^2}{4p\mu}[1 - \cos(2t\sqrt{\mu})].$$

Ces valeurs nous montrent que le mobile oscille de part et d'autre du sommet sur l'arc dont les extrémités répondent à l'abscisse $\frac{\beta^2}{2p\mu}$, la durée d'une oscillation étant $\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$.

6. *Une petite bille d'une élasticité connue est lancée au-dessus d'un plan horizontal, dans une direction connue et avec une vitesse donnée. Déterminer les points où la bille viendra frapper le plan après ses bonds successifs, la vitesse et la direction de la bille à l'instant de ces chocs et les époques auxquelles ils auront lieu. On supposera que la bille est lancée d'un point pris sur le plan horizontal.*

Soient :

e l'élasticité de la bille ;

u_0 la vitesse initiale ;

u_n la vitesse qui anime le mobile immédiatement avant le $n^{ième}$ choc ;

α_0 l'angle que la direction de la vitesse initiale fait avec l'horizon ;

α_n l'angle sous lequel la bille vient frapper le plan horizontal au $n^{ième}$ choc ;

t_n le temps qui s'écoule entre l'instant du départ et le $n^{ième}$ choc ;

l_n la distance qui sépare la position initiale et le point où le $n^{ième}$ choc a lieu.

La théorie du choc des corps nous donne

$$u_n \cos\alpha_n = u_{n-1} \cos\alpha_{n-1},$$
$$u_n \sin\alpha_n = e u_{n-1} \sin\alpha_{n-1}.$$

Si l'on applique ces équations aux chocs successifs, on

tire de la première

$$(1) \qquad u_n \cos\alpha_n = u_1 \cos\alpha_1 = u_0 \cos\alpha_0,$$

et de la seconde

$$(2) \qquad u_n \sin\alpha_n = e^{n-1} u_1 \sin\alpha_1 = e^{n-1} u_0 \sin\alpha_0;$$

par conséquent,

$$\tang\alpha_n = e^{n-1} \tang\alpha_0,$$

$$u_n = u_0 \cos\alpha_0 [1 + e^{2(n-1)} \tang^2\alpha_0]^{\frac{1}{2}}.$$

Ces dernières formules nous donnent la direction et la vitesse de la bille à l'instant du $n^{ième}$ choc; elles nous permettent de déterminer toutes les circonstances du mouvement sur chacun des arcs paraboliques.

D'après les propriétés bien connues du mouvement des projectiles dans le vide, nous avons

$$t_n - t_{n-1} = \frac{2}{g} u_n \sin\alpha_n,$$

$$l_n - l_{n-1} = u_n \cos\alpha_n (t_n - t_{n-1}).$$

La première de ces équations peut s'écrire, en vertu des relations (2),

$$(3) \qquad t_n - t_{n-1} = \frac{2}{g} u_0 \sin\alpha_0 e^{n-1};$$

on en conclut

$$t_n = \frac{2}{g} u_0 \sin\alpha_0 (e^{n-1} + e^{n-2} + \ldots + e + 1),$$

$$t_n = \frac{2 u_0 \sin\alpha_0}{g} \frac{1 - e^n}{1 - e}.$$

Telle est l'époque du $n^{ième}$ choc.

La seconde des équations considérées, eu égard aux relations (2) et (3), peut se mettre sous la forme

$$l_n - l_{n-1} = \frac{2}{g} u_0^2 \cos\alpha_0 \sin\alpha_0 e^{n-1} = \frac{u_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} e^{n-1};$$

on en tire

$$l_n = \frac{u_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}(e^{n-1} + e^{n-2} + \ldots + e + 1),$$

$$l_n = \frac{u_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} \cdot \frac{1 - e^n}{1 - e}.$$

C'est la distance du point de départ au point du $n^{ième}$ choc.

BORDONI, *Memorie della Società Italiana*, t. XVII, part. I, p. 191; 1816.

7. *Un point matériel est attiré vers deux axes rectangulaires* OX, OY *par des forces inversement proportionnelles aux cubes de ses distances à ces axes. Déterminer sa trajectoire.*

Nous supposerons que le mobile est primitivement placé dans le plan des deux droites OX, OY sans vitesse initiale, et nous prendrons ces droites pour axes coordonnés.

Soient a, b les coordonnées initiales du mobile, et m^4, n^4 les attractions des axes OX, OY à l'unité de distance.

Les équations du mouvement sont

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m^4}{x^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{n^4}{y^3};$$

elles ont pour intégrales premières

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{m^4}{x^2} + A, \quad \frac{dy^2}{dt^2} = \frac{n^4}{y^2} + B,$$

A et B représentant deux constantes arbitraires.

Si l'on détermine ces constantes par les données initiales, il vient

$$\frac{dx^2}{dt^2} = m^4\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}\right), \quad \frac{dy^2}{dt^2} = n^4\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{b^2}\right),$$

ou

$$\frac{x\,dx}{\pm\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{m^2}{a}\,dt,\quad \frac{y\,dy}{\pm\sqrt{b^2-y^2}}=\frac{n^2}{b}\,dt.$$

Intégrons une seconde fois, et nommons A′, B′ des constantes arbitraires ; nous obtenons

$$(2)\quad \mp\sqrt{a^2-x^2}=\frac{m^2}{a}\,t+\mathrm{A}',\quad \mp\sqrt{b^2-y^2}=\frac{n^2}{b}\,t+\mathrm{B}'.$$

Or, lorsque $t=0$, on a

$$x=a,\quad y=b;$$

par conséquent, les constantes sont nulles, et les intégrales peuvent s'écrire

$$x^2=a^2-\frac{m^4t^2}{a^2},\quad y^2=b^2-\frac{n^4t^2}{b^2}.$$

Ces expressions de x et de y deviennent imaginaires lorsque t atteint les valeurs $\frac{a^2}{m^2}$, $\frac{b^2}{n^2}$; elles ne peuvent donc convenir après les époques marquées par ces valeurs.

Occupons-nous d'abord de la variable x. Pour avoir son expression après l'époque $t=\frac{a^2}{m^2}$, il nous faut revenir à l'équation primitive (1), et l'intégrer en déterminant les constantes par les circonstances qui se présentent à l'époque $t=\frac{a^2}{m^2}$.

Puisque le temps n'entre pas dans la valeur de $\frac{dx}{dt}$ que l'on obtient par une première intégration, on arrivera encore à l'équation (2),

$$\mp\sqrt{a^2-x^2}=\frac{m^2}{a}\,t+\mathrm{A}'.$$

Si l'on y pose $t = \frac{a^2}{m^2}$ et $x = 0$, ce qui est la valeur de x correspondante à cette époque, on trouve

$$A' = -a \mp a,$$

et comme t doit augmenter lorsque la valeur numérique du radical diminue, il faut prendre $A' = -2a$; en sorte que l'on a

$$\mp a\sqrt{a^2 - x^2} = m^2 t - 2a^2.$$

Le radical a le signe inférieur lorsque le mobile s'approche de l'axe des y; il a le signe supérieur lorsqu'il s'en écarte. Élevant au carré, il vient

$$a^2(a^2 - x^2) = (m^2 t - 2a^2)^2,$$

$$x^2 = -\frac{m^4}{a^2}\left(t - \frac{a^2}{m^2}\right)\left(t - \frac{3a^2}{m^2}\right).$$

Cette valeur de x devient imaginaire lorsque t atteint la valeur $\frac{3a^2}{m^2}$.

On verra de même qu'à partir de cette époque jusqu'à l'époque $t = \frac{5a^2}{m^2}$, la formule qui représente le mouvement est

$$a^2(a^2 - x^2) = (m^2 t - 4a^2)^2,$$

et ainsi de suite.

Il résulte de cette discussion que la projection du mobile sur l'axe des x exécute de part et d'autre de l'origine des oscillations dont la durée commune est $\frac{2a^2}{m^2}$, et l'amplitude $2a$. Généralement la valeur de x en fonction de t pour la $p^{ième}$ oscillation est donnée par la formule

$$a^2(a^2 - x^2) = [m^2 t - 2(p-1)a^2]^2.$$

On trouvera de la même manière que la projection du

mobile sur l'axe des y exécute de part et d'autre de l'origine des oscillations dont la durée commune est $\frac{2b^2}{n^2}$, et l'amplitude $2b$. La valeur de y en fonction de t pour la $q^{ième}$ oscillation est donnée par la formule

$$b^2(b^2 - y^2) = [n^2 t - 2(q-1)b^2]^2.$$

Si l'on élimine t entre ces deux dernières équations, il vient

$$an^2\left[\sqrt{a^2 - x^2} + 2(p-1)a\right] = bm^2\left[\sqrt{b^2 - y^2} + 2(q-1)b\right].$$

Cette équation représente la courbe sur laquelle se meut le mobile à l'époque t, pourvu qu'on y remplace p par le nombre entier immédiatement supérieur à

$$\frac{t + \frac{a^2}{m^2}}{\frac{2a^2}{m^2}} = \frac{m^2 t + a^2}{2a^2},$$

et q par le nombre entier immédiatement supérieur à

$$\frac{t + \frac{b^2}{n^2}}{\frac{2b^2}{n^2}} = \frac{n^2 t + b^2}{2b^2}.$$

On pourra construire les courbes qui correspondent aux diverses valeurs simultanées de p et de q; les intersections de ces courbes détermineront la partie de chacune d'elles qui est parcourue par le mobile.

On voit par ce problème que, dans certaines questions de dynamique qui admettent toujours une solution réelle, les intégrales des équations du mouvement peuvent néanmoins présenter des quantités imaginaires qui s'introduisent lorsque le temps dépasse une certaine valeur. Cela

montre que le mouvement ne peut être représenté à toute époque par les mêmes formules. Alors, *pour obtenir les formules réelles qu'il faut substituer aux premières, lorsque celles-ci deviennent imaginaires, il suffit d'intégrer de nouveau les équations primitives en déterminant les constantes par les circonstances qui ont lieu à l'instant où les premières formules cessent d'être réelles.*

8. *Un projectile est lancé sous une inclinaison connue* α, *avec une vitesse telle, que sa trajectoire passe en un point donné* A. *On sait que la droite qui joint le point de départ au point* A *fait avec l'horizon un angle* β, *et que le corps parcourrait cette droite en* n *secondes s'il se mouvait uniformément avec la vitesse initiale. Déterminer l'instant auquel le projectile atteindra le point* A.

Le temps qui s'écoule entre l'instant du départ et l'instant cherché, exprimé en secondes, est égal à $n\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$.

9. *Au même instant on lance deux projectiles dans un même plan vertical, avec des vitesses* v *et* v', *sous des inclinaisons* α *et* α'. *Outre le point de départ, il est un second point commun à leurs trajectoires; les deux mobiles l'atteindront à des époques différentes. On demande l'intervalle* T *qui sépare ces deux époques.*

Si l'on suppose $\alpha > \alpha'$, on obtient

$$T = \frac{2}{g}\,\frac{vv'\sin(\alpha-\alpha')}{v\cos\alpha + v'\cos\alpha'}.$$

10. *Déterminer le temps* T *qu'un projectile emploie à parcourir un arc donné de sa trajectoire parabolique, en fonction des vitesses* v *et* v' *aux extrémités de cet arc, de la vitesse* v_1 *au sommet de la parabole, et de l'an-*

gle β que font entre elles les tangentes aux extrémités de l'arc.

On trouve

$$T = \frac{vv' \sin\beta}{gv_1}.$$

11. *Un point matériel décrit une ellipse sous l'action d'une force perpendiculaire au grand axe. Trouver la force qui le sollicite en un point quelconque de sa trajectoire.*

Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de l'ellipse, Y la force cherchée parallèle à l'axe des y, β la vitesse constante du mobile suivant l'axe des x.

On trouve

$$Y = \frac{b^4 \beta^2}{a^2 y^3}.$$

Si l'ellipse se réduit à un cercle de rayon a, la force devient

$$Y = \frac{a^2 \beta^2}{y^3}.$$

NEWTON, *Principia*, lib. I, prop. 8.
RICCATI, *Comment. Bonon.*, t. IV, p. 149; 1757.

12. *Un point matériel décrit une cycloïde sous l'action d'une force parallèle à la base. Déterminer la force qui le sollicite en un point quelconque de sa trajectoire.*

Soient

$$x = a(1 - \cos\theta),$$
$$y = a(\theta + \sin\theta)$$

les équations de la cycloïde, Y la force cherchée parallèle

à l'axe des y, β la vitesse constante du mobile suivant l'axe des x.

On trouve

$$Y = \frac{2\beta^2}{a(2\sin\theta - \sin 2\theta)}.$$

13. *Un point matériel est lancé avec une vitesse connue parallèlement à une droite fixe, vers laquelle il est constamment attiré par une force proportionnelle à la distance. Déterminer la position du mobile à une époque quelconque, et trouver l'équation de sa trajectoire.*

Soient b la distance initiale du mobile à la droite, β la vitesse imprimée, μ^2 l'attraction à l'unité de distance. Prenons pour axe des x la droite donnée et pour axe des y la perpendiculaire qui passe par la position initiale du mobile.

Nous trouvons

$$x = \beta t, \quad y = b\cos(\mu t),$$

d'où

$$y = b\cos\frac{\mu x}{\beta}.$$

RICCATI, *Comment. Bonon.*, t. IV, p. 155; 1757.

14. *Les données restent les mêmes que dans le problème précédent, si ce n'est que la force d'attraction varie en raison inverse du carré de la distance. Trouver l'équation de la trajectoire.*

On trouve

$$\mu\frac{x}{\beta}\sqrt{\frac{2}{b}} = \frac{b}{2}\left(\pi - \arccos\frac{b-2y}{b}\right) + \sqrt{by - y^2}.$$

RICCATI, *Comment. Bonon.*, t. IV, p. 159.

15. *Un point matériel est lancé dans la direction* OX *avec une vitesse donnée* β; *ce mobile est attiré par une*

force proportionnelle à la distance vers un centre d'action qui se meut uniformément dans la direction perpendiculaire OY. *Déterminer la position du mobile quand son mouvement devient parallèle à* OY.

Soient a la distance initiale du centre d'action à l'origine O, β' la vitesse uniforme de ce centre, μ^2 l'attraction à l'unité de distance, et x', y' les coordonnées de la position cherchée du point matériel par rapport aux axes OX, OY.

On trouve

$$x' = \frac{\beta}{\mu}, \quad y' = a + \frac{\beta'}{2\mu}(\pi - 2).$$

16. *Un point matériel primitivement en repos est abandonné à l'action de deux forces : l'une est constante en grandeur et en direction, l'autre est une force répulsive émanée d'un centre fixe et proportionnelle à la distance. Déterminer la position du mobile à une époque quelconque, et trouver l'équation de sa trajectoire.*

Prenons le centre de répulsion pour origine des coordonnées, et disposons les axes de manière que chacun d'eux fasse un angle de 45 degrés avec la direction de la force constante.

Soient $x = a$, $y = b$ les coordonnées de la position initiale du mobile, μ^2 la force répulsive à l'unité de distance et f la force constante.

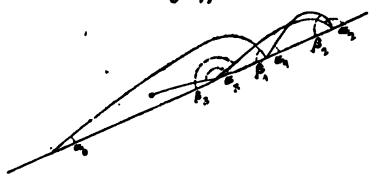
Si l'on pose $\frac{f}{\mu^2\sqrt{2}} = m$, il vient

$$\frac{x+m}{a+m} = \frac{e^{\mu t} + e^{-\mu t}}{2} = \frac{y+m}{b+m},$$

équations qui résolvent complétement le problème.

17. *Une petite bille d'élasticité donnée, lancée dans une direction connue au-dessus d'un plan incliné qui passe au point de départ, parcourt ce plan en bondissant. Déterminer les angles d'incidence et de réflexion aux différents chocs.*

Fig. 47.



Soient e l'élasticité de la bille, i l'inclinaison du plan, α_0 l'angle que la direction du mouvement initial fait avec le plan, α_n et β_n les angles de réflexion et d'incidence au $n^{ième}$ choc comptés à partir du plan.

On trouve

$$\operatorname{tang}\alpha_n = e \operatorname{tang}\beta_n = \frac{(1-e)\,e^n \operatorname{tang}\alpha_0}{1-e-2(1-e^n)\operatorname{tang} i \operatorname{tang}\alpha_0}.$$

BORDONI, *Memorie della Società Italiana*, t. XVII, part. I, p. 191; 1816.

18. *Les données sont les mêmes que dans le problème précédent. On demande de trouver la relation qui existe entre l'élasticité de la bille et les portées de trois bonds successifs mesurées sur le plan, et de déterminer la distance de la bille à son point de départ lorsqu'elle commence à glisser en cessant de bondir.*

Conservons les notations du problème précédent, et nommons v_0 la vitesse initiale, R_1, R_2, etc., R_n, R_{n+1}, R_{n+2}, etc., les portées des arcs successifs, et S la distance de la bille à son point de départ lorsqu'elle commence à glisser; ces distances R_1, R_2, etc., et S seront positives en remontant le plan et négatives en descendant.

On trouve la relation

$$R_{n+2} - (e+e^2)\,R_{n+1} + e^3 R_n = 0;$$

d'où l'on voit que les portées des arcs successifs seront les

coefficients des puissances successives de l'indéterminée z dans le développement de la fraction

$$\frac{R_1 - [(e+e^2)R_1 - R_2]z}{1-(e+e^2)z+e^3z^2}$$

suivant les puissances ascendantes de z. Il suit de là, en faisant $z=1$,

$$S = \frac{R_1(1-e-e^2)+R_2}{(1-e)^2(1+e)},$$

$$S = \frac{2v_0^2 \sin\alpha_0}{g\cos^2 i}\left[\frac{\cos\alpha_0\cos i}{1-e} - \frac{\sin\alpha_0 \sin i}{(1-e)^2}\right],$$

et si l'on pose $(1-e)\cot i = \cot\beta$,

$$S = \frac{2v_0^2 \sin\alpha_0 \sin\beta \cos(\alpha_0+\beta)}{g\sin i\cos^2\beta}.$$

19. *Un projectile décrit une parabole. Le lieu de l'intersection de deux tangentes à la trajectoire, aux points où les vitesses ont un produit constant, est un cercle décrit du foyer de la parabole comme centre.*

20. *Plusieurs projectiles* P *sont lancés en même temps, du même point, avec une même vitesse* v_0 *et dans des directions différentes. Au même instant on laisse tomber librement du même point un corps pesant* p.

Démontrer que les projectiles P *se trouvent à chaque instant sur une même sphère variable, qui a son centre au point* p, *et dont le rayon est* $v_0 t$, *le temps* t *étant compté depuis l'instant du départ.*

SECTION II.

FORCES CENTRALES.

Un point matériel est attiré vers un centre fixe par une force F constamment dirigée vers le centre et variable

avec la distance; on prend pour origine le centre d'attraction, et l'on nomme :

x, y les coordonnées du mobile;
r sa distance au centre d'attraction;
θ l'angle que le rayon vecteur r fait avec l'axe des x;
P la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente au point de la courbe que le mobile occupe;
ρ le rayon de courbure;
v la vitesse;
r_0 et v_0 deux valeurs simultanées des quantités r et v;
C une constante.

Alors les équations générales du mouvement sont celles-ci :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Fx}{r},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Fy}{r}.$$

On en tire les formules suivantes dont l'usage est très-commode :

(I) $$r^2\,d\theta = C\,dt,$$

(II) $$Pv = C,$$

(III) $$v^2 = C^2\left[\left(\frac{d}{d\theta}\cdot\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right],$$

(IV) $$v^2 - v_0^2 = -2\int_{r_0}^{r} F\,dr,$$

(V) $$F = \frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\cdot\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right),$$

(VI) $$F = r\frac{d\theta^2}{dt^2} - \frac{d^2r}{dt^2},$$

(VII) $$F = \frac{C^2}{P^3}\frac{dP}{dr} = \frac{C^2 r}{\rho P^3}.$$

Si la force centrale, au lieu d'être attractive comme nous l'avons supposé, était répulsive, il faudrait dans toutes nos formules changer le signe de F, et dans la dernière prendre négatif le rayon de courbure.

L'équation (I) montre que l'aire décrite par le rayon vecteur est proportionnelle au temps; la constante C est le double de l'aire décrite dans l'unité de temps. L'équation (II) indique que la vitesse est inversement proportionnelle à la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente. Ces deux propositions, qui se déduisent immédiatement l'une de l'autre, furent établies en premier lieu par Newton dans le livre des *Principes* (lib. I, prop. 1). L'équation (III) est une conséquence des deux premières. L'équation (IV) montre que l'accroissement du carré de la vitesse ne dépend que de l'accroissement de la distance au centre, quel que soit l'espace parcouru. Cette proposition est encore une découverte de Newton (*Principia*, lib. I, prop. 40). L'équation (V) est due à M. Binet; elle fait connaître la trajectoire lorsqu'on donne la force, ou fait connaître la force lorsque la trajectoire est donnée. L'équation (VI) a été donnée presque en même temps par Clairaut (*) et par Euler (**); elle exprime que la force accélératrice dirigée suivant le rayon vecteur est égale à l'excès de la force centrifuge dans le mouvement, supposé circulaire, sur la force attractive. Cette équation se déduit aisément des formules précédentes; car, en tenant compte de la formule (I), on trouve

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = -\frac{r^2}{C^2}\frac{d^2r}{dt^2}.$$

(*) *Théorie de la Lune*, p. 2; 1752.
(**) *Novi Comment. Petrop.*, p. 164; 1752-1753.

Portant cette valeur dans la formule (V), il vient

$$F = -\frac{d^2 r}{d\theta^2} + \frac{C^2}{r^3},$$

équation identique à l'équation (VI), en vertu de la formule (I).

Au reste on comprend très-bien que, si le mouvement était circulaire, uniforme, et que la force F fût égale à la force centrifuge de ce mouvement, l'accélération suivant le rayon vecteur serait nulle. Donc, quand la force F a une autre valeur, l'accélération suivant le rayon vecteur est égale et contraire à l'excès de la force F sur cette force centrifuge.

La formule (VII) fut communiquée sans démonstration par Moivre à Jean Bernoulli, en l'année 1705; celui-ci lui renvoya la preuve de la formule dans une lettre écrite de Bâle, le 16 février 1706 (*). Voici comment on peut la démontrer.

Nommons φ l'angle que le rayon vecteur fait avec la tangente à la trajectoire. On a

$$\frac{v^2}{\rho} = F \sin\varphi \quad \text{(p. 293)};$$

or

$$v^2 = \frac{C^2}{P^2} \quad \text{(form. II)},$$

$$\rho \sin\varphi = r\frac{dr}{dP}\sin\varphi = P\frac{dr}{dP} \quad \text{(p. 157)}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, il

(*) *Voir* Moivre, *Miscell. analyt.*, lib. VIII, et Jean Bernoulli, *Opera*, t. I, p. 477.

vient

$$F = \frac{C^2}{P^3}\frac{dP}{dr} = \frac{C^2 r}{\rho P^3},$$

ce qui est l'équation de Moivre.

Laplace a fait une application remarquable de ces formules aux réfractions astronomiques, dans le livre X de la *Mécanique céleste*.

1. *Un point matériel décrit une spirale logarithmique sous l'action d'une force constamment dirigée vers le pôle. Trouver l'expression de la force et la vitesse du mobile en un point quelconque de la trajectoire.*

Soit

$$a \log r = \theta$$

l'équation de la spirale. On sait que la tangente fait avec le rayon vecteur un angle constant β, qui est donné par la formule

$$\operatorname{tang}\beta = a.$$

La perpendiculaire abaissée du pôle sur la tangente est

$$P = r \sin\beta = \frac{ar}{\sqrt{1+a^2}};$$

dès lors la formule (VII) nous donne

$$F = \frac{C^2(1+a^2)}{a^2 r^3}.$$

Nous pourrons déterminer la constante C, si nous connaissons la vitesse v_0 qui correspond à une valeur donnée r_0 du rayon vecteur. En effet, d'après la formule (II), nous aurons

$$C = \frac{a r_0 v_0}{\sqrt{1+a^2}},$$

d'où

$$F = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3}.$$

La formule (II) nous donne encore la vitesse en un point quelconque de la trajectoire,

$$v = \frac{C}{P} = \frac{r_0 v_0}{r}.$$

NEWTON, *Principia*, lib. I, prop. 9.

2. *Un point matériel décrit une parabole sous l'influence d'un centre d'attraction placé au foyer de la courbe; lorsque le mobile est à une distance donnée du foyer, la force d'attraction rapportée à l'unité de distance est subitement doublée. Déterminer la trajectoire que le mobile va décrire.*

Soit p le paramètre de la parabole.

Dans la première partie du mouvement, on a, d'après la nature de la parabole,

$$\frac{1}{P^2} = \frac{2}{pr},$$

et, si l'on différentie,

$$\frac{2}{P^3}\frac{dP}{dr} = \frac{2}{pr^2};$$

par conséquent (formule VII),

$$F = \frac{C^2}{pr^2}.$$

Dans la seconde partie du mouvement,

$$F = \frac{2C^2}{pr^2};$$

d'où

$$\frac{2C^2}{pr^2} = \frac{C^2}{P^3}\frac{dP}{dr}.$$

Cette équation a pour intégrale

$$\frac{2}{pr} = \frac{1}{2P^2} + \text{const.}$$

Si l'on désigne par a la valeur du rayon r à l'instant où la force est doublée, et si l'on observe qu'à cet instant la perpendiculaire P est abaissée sur la tangente commune à la parabole et à la nouvelle trajectoire, on aura, pour déterminer la constante,

$$\frac{2}{pa} = \frac{1}{pa} + \text{const.};$$

en sorte que la nouvelle trajectoire sera représentée par l'équation

$$\frac{2}{pr} = \frac{1}{2P^2} + \frac{1}{pa},$$

ou

$$\frac{pa}{2P^2} = \frac{2a}{r} - 1.$$

Cette équation est celle d'une ellipse dont le grand axe est $2a$, le petit axe $\sqrt{2pa}$, et dont l'un des foyers coïncide avec celui de la parabole.

La distance de ce foyer au point de contact des deux courbes est égale au demi-grand axe de l'ellipse; par conséquent, la parabole touche l'ellipse au sommet de son petit axe, et la tangente commune est parallèle au grand axe. Cette tangente commune, considérée comme appartenant à la parabole, fait avec l'axe de cette courbe un angle dont le sinus est

$$\frac{P}{r} = \sqrt{\frac{p}{2a}};$$

il s'ensuit que l'inclinaison du grand axe de l'ellipse sur

l'axe de la parabole est

$$\text{arc sin}\sqrt{\frac{p}{2a}}.$$

3. *Un point matériel, soumis à l'attraction d'un centre fixe, se meut avec une vitesse inversement proportionnelle à la $n^{\text{ième}}$ puissance de sa distance au centre. Trouver la loi de l'attraction et l'équation de la trajectoire.*

Soit

$$v = \frac{\mu}{r^n}$$

l'expression de la vitesse.

La formule (IV) nous donne

$$\frac{\mu^2}{r^{2n}} - \frac{\mu^2}{r_0^{2n}} = 2\int_{r_0}^{r} F\,dr;$$

si l'on différentie, il vient

$$F = \frac{n\mu^2}{r^{2n+1}}.$$

Telle est la force d'attraction.

Pour obtenir l'équation de la trajectoire, nous nous servirons de la formule (III). Elle nous donne

$$\frac{\mu^2}{r^{2n}} = C^2\left[\left(\frac{d.}{d\theta}\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right],$$

$$\frac{(\mu^2 - C^2 r^{2n-2})^{\frac{1}{2}}}{r^n} = C\frac{d.}{d\theta}\frac{1}{r},$$

$$(n-1)d\theta = -\frac{dr^{n-1}}{\left(\frac{\mu^2}{C^2} - r^{2n-2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

L'intégrale est

$$(n-1)\theta = \text{arc cos}\,\frac{C r^{n-1}}{\mu} + \text{const.},$$

ou, supposant que θ soit nul lorsque $r = a$,

$$(n-1)\theta = \text{arc cos}\left(\frac{C}{\mu} r^{n-1}\right) - \text{arc cos}\left(\frac{C}{\mu} a^{n-1}\right).$$

Dans le cas particulier où $n = 1$, l'équation de la trajectoire devient

$$r = ae^{\theta}\sqrt{\frac{\mu^2}{C^2} - 1}.$$

Lorsque $n = \frac{1}{2}$, la trajectoire est une section conique.

RICCATI, *Comment. Bonon.*, t. IV, p. 184.

4. *Une petite bille, attachée à l'extrémité d'un fil très-délié et légèrement extensible, repose sur un plan horizontal et parfaitement uni; le fil est tendu dans sa longueur naturelle, et sa seconde extrémité est fixée sur le plan. Le système étant dans cet état, on imprime à la bille une vitesse connue, et dirigée dans le plan horizontal suivant la perpendiculaire à la direction du fil. Déterminer l'allongement du fil à une époque quelconque du mouvement, et trouver l'équation de la courbe décrite par la bille.*

Soient :

m la masse de la bille;
a la longueur naturelle du fil;
v_0 la vitesse initiale;
$r = a + x$ la longueur du fil à l'époque t;
θ l'angle décrit par le fil;
p la tension nécessaire pour faire acquérir au fil la longueur $a + \beta$.

Puisque la tension est proportionnelle à l'allongement, l'expression générale de cette force sera $\frac{px}{\beta}$. Substituons

cette valeur dans la formule (VI); il vient

$$\frac{d^2r}{dt^2} = r\frac{d\theta^2}{dt^2} - \frac{px}{m\beta},$$

et si l'on a égard à la formule (I),

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{C^2}{r^3} - \frac{px}{m\beta}.$$

D'ailleurs, en vertu de la formule (II),

$$av_0 = C;$$

par conséquent,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{a^2v_0^2}{r^3} - \frac{px}{m\beta},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{a^2v_0^2}{(a+x)^3} - \frac{px}{m\beta};$$

d'où

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -\frac{a^2v_0^2}{(a+x)^2} - \frac{px^2}{m\beta} + \text{const.}$$

La constante se détermine par la condition que $\frac{dx}{dt}$ soit nul à l'origine du mouvement; on trouve qu'elle est égale à v_0^2.

D'après la nature du fil, x et β sont des quantités fort petites et du même ordre de grandeur; nous pourrons donc sans erreur sensible réduire la valeur précédente de $\frac{dx^2}{dt^2}$ à sa partie principale, qui est du premier degré par rapport à x et β. Alors il vient

$$\text{(A)} \qquad \frac{dx^2}{dt^2} = v_0^2 - v_0^2\left(1 - \frac{2x}{a}\right) - \frac{px^2}{m\beta},$$

$$dt = \sqrt{\frac{m\beta}{p}}\,\frac{dx}{\sqrt{\frac{2m\beta v_0^2}{pa}x - x^2}},$$

$$t = \sqrt{\frac{m\beta}{p}}\,\text{arc cos}\left(1 - \frac{pa}{m\beta v_0^2}x\right).$$

Nous n'ajoutons pas de constante, car x et t sont nuls à l'origine du mouvement.

Ainsi nous obtenons

$$x = \frac{m\beta v_0^2}{pa}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{p}{m\beta}}\,t\right)\right].$$

On voit par cette valeur que le fil reviendra périodiquement à sa longueur naturelle, après des intervalles de temps dont la durée est

$$\pi\sqrt{\frac{m\beta}{p}}.$$

Cherchons maintenant l'équation de la courbe décrite.

La formule (I) nous permet de substituer $d\theta$ à dt dans l'équation (A). Il vient

$$\frac{dx^2}{d\theta^2} = \frac{r^4}{C^2}\left(\frac{2v_0^2 x}{a} - \frac{px^2}{m\beta}\right)$$
$$= \frac{(a+x)^4}{a^2 v_0^2}\left(\frac{2v_0^2 x}{a} - \frac{px^2}{m\beta}\right),$$

ou, dans notre degré d'approximation,

$$\frac{dx^2}{d\theta^2} = 2ax - \frac{pa^2}{m\beta v_0^2}x^2,$$

$$d\theta = \frac{dx}{\left[2ax - \frac{pa^2}{m\beta v_0^2}x^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\theta = \sqrt{\frac{m\beta v_0^2}{pa^2}}\,\text{arc}\cos\left[1 - \frac{pa}{m\beta v_0^2}x\right],$$

$$r = a + x = a + \frac{m\beta v_0^2}{pa}\left[1 - \cos\left(\frac{a}{v_0}\sqrt{\frac{p}{m\beta}}\,\theta\right)\right].$$

Telle est l'équation de la trajectoire.

Cette courbe est formée d'ondulations égales et disposées

en cercle; chaque ondulation sous-tend un angle au centre égal à $\pi \frac{v_0}{a} \sqrt{\frac{m\beta}{p}}$.

Jacques Bernoulli a commis une erreur dans la solution de ce problème. Il part de l'équation

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{v_0^2}{\rho} - \frac{px}{m\beta},$$

dans laquelle ρ désigne le rayon de courbure de la trajectoire; or, entre $\frac{v_0^2}{\rho}$ et $\frac{a^2 v_0^2}{r^3}$ qui est le terme correspondant de l'équation rigoureuse, la différence est du même ordre que x; par conséquent cette équation n'a pu lui donner une valeur exacte de l'inconnue x.

JACQUES BERNOULLI, *Nova Acta Acad. Petrop.*, 1783, p. 213.

5. *Un point matériel se meut sous l'action d'une force dirigée vers un centre fixe et fonction de la distance; la trajectoire qu'il décrit est de telle nature, que l'un des rayons vecteurs maxima est à très-peu près égal au rayon vecteur minimum qui le suit. Déterminer la limite de l'angle compris entre ces deux rayons vecteurs lorsqu'ils deviennent égaux.*

Posons dans la formule (V)

$$\frac{1}{r} = z$$

et

$$\int F r^2 dz = \varphi(z);$$

alors cette formule devient

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} = \frac{1}{C^2} \varphi'(z) - z.$$

Intégrons, et nommons a une constante; il vient

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = a + \frac{2}{C^2}\varphi(z) - z^2,$$

$$d\theta = \frac{dz}{\sqrt{a + \frac{2}{C^2}\varphi(z) - z^2}}.$$

Les rayons vecteurs maxima ou minima sont les inverses des racines de l'équation

$$a + \frac{2}{C^2}\varphi(z) - z^2 = 0.$$

Soient α, β les deux racines positives qui correspondent aux deux rayons considérés, et V la limite de l'angle compris entre ces deux rayons lorsque β devient égal à α.

Cet angle V est la limite de l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta \frac{dz}{\sqrt{a + \frac{2}{C^2}\varphi(z) - z^2}}.$$

D'après les deux relations

$$a + \frac{2}{C^2}\varphi(\alpha) = \alpha^2, \quad a + \frac{2}{C^2}\varphi(\beta) = \beta^2,$$

nous avons

$$\frac{2}{C^2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}, \quad a = \frac{\alpha^2\varphi(\beta) - \beta^2\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}.$$

Il s'ensuit

$$V = \lim. \int_\alpha^\beta \frac{dz\sqrt{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}}{[\alpha^2\varphi(\beta) - \beta^2\varphi(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2)\varphi(z) - z^2\varphi(\beta) + z^2\varphi(\alpha)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour déterminer la limite de cette intégrale, nous

substituerons à la variable z une nouvelle variable u définie par la relation

$$z = \frac{\alpha + \beta u^2}{1 + u^2}.$$

Alors, si l'on pose

$$U^2 = \frac{(\beta - \alpha)^2 [\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)]}{\alpha^2 \varphi(\beta) - \beta^2 \varphi(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2) \varphi\left(\frac{\alpha + \beta u^2}{1 + u^2}\right) - [\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)]\left(\frac{\alpha + \beta u^2}{1 + u^2}\right)},$$

on trouve

$$V = \lim. \int_0^\infty U \frac{2u\,du}{(1 + u^2)^2}.$$

Lorsque l'on fait $\beta = \alpha$, U^2 prend la forme $\frac{0}{0}$; mais en prenant le rapport des dérivées troisièmes du numérateur et du dénominateur, on trouve que la véritable valeur pour $\beta = \alpha$ est

$$\frac{(1 + u^2)^2}{u^2} \frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi'(\alpha) - \alpha\varphi''(\alpha)}:$$

en sorte que

$$V = 2\left[\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi'(\alpha) - \alpha\varphi''(\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{du}{1 + u^2} = \pi\left[\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi'(\alpha) - \alpha\varphi''(\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Dans le cas où la force est proportionnelle à la $n^{ième}$ puissance de la distance,

$$\varphi'(z) = \frac{\mu}{z^{n+2}},$$

$$V = \frac{\pi}{\sqrt{n + 3}}.$$

Cette dernière formule a été donnée par Newton, dans le livre des *Principes* (liv. I, sect. IX, prop. 45). On voit que dans ce cas la limite V est indépendante de α. D'ailleurs il est aisé de reconnaître que le cas d'une force proportionnelle à une puissance de la distance est le seul où l'angle V soit indépendant du rayon vecteur.

En effet, l'équation

$$\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi'(\alpha) - \alpha\varphi''(\alpha)} = \text{const.} = A$$

a pour intégrale

$$\varphi'(\alpha) = B\alpha^{1-\frac{1}{A}},$$

B étant une constante arbitraire, et alors

$$F = Br^{\frac{1}{A}-3},$$

la force est proportionnelle à une puissance de la distance.

Les planètes décrivent autour du Soleil des orbites à peu près circulaires, dont les périhélies sont sensiblement immobiles, et situés à 180 degrés des aphélies; si donc on admet que les planètes sont attirées vers le Soleil par une force proportionnelle à une puissance de la distance, il faut que le degré de cette puissance soit exactement -2. En effet, lorsque $n = -2$, on a $V = \pi$; et lors même que n différerait très-peu de -2, V serait assez différent de π pour qu'il en résulte un mouvement considérable dans les périhélies.

Si l'on avait, par exemple, $n = -2{,}01$, il en résulterait

$$V = \frac{\pi}{\sqrt{1 - 0{,}01}} = \pi + \frac{0{,}01}{2}\pi = 180^\circ 54' \ldots;$$

le périhélie se déplacerait de 54 minutes à chaque révolution, tandis que les mouvements observés ne sont que de quelques secondes. Ceci confirme la loi de Newton.

PLANA, Note sur la proposition 45 du Ier livre des *Principes*.

6. *Une comète décrit autour du Soleil une orbite parabolique dont les éléments sont inconnus. Cet astre a*

été observé en deux points dont on connaît les distances au Soleil, ainsi que la distance mutuelle. Trouver une relation entre le temps qui sépare les deux observations et les autres quantités connues.

Nous pouvons négliger la très-petite quantité qui exprime le rapport de la masse de la comète à celle du Soleil. Il en résulte que l'aire décrite par le rayon vecteur dans l'unité de temps est égale au produit de la racine carrée du paramètre de l'orbite par une quantité connue, qui est la même pour tous les corps considérés.

Soient

$$r = \frac{p}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta}$$

l'équation de l'orbite, r, r' et θ, θ' les coordonnées des deux positions observées, c la distance de ces deux positions, t l'époque de la première observation comptée à partir de l'instant où l'angle θ est nul, T le temps qui sépare les deux observations, et $k\sqrt{p}$ le double de l'aire décrite dans l'unité de temps (*).

(*) Dans le calcul des orbites des corps qui font partie de notre système planétaire, on prend ordinairement pour unité de distance le demi-grand axe de l'orbite terrestre et pour unité de temps le jour solaire moyen. Alors, si l'on nomme T la durée d'une révolution sidérale de la Terre, m la masse de la Terre et M celle du Soleil, la constante k est égale à

$$\frac{2\pi}{T\sqrt{1+\frac{m}{M}}}.$$

Or

$$T = 365^{j.m.},25637,$$

et la valeur du rapport $\frac{M}{m}$, la plus probable aujourd'hui, est

$$\frac{M}{m} = 359724;$$

par conséquent on a

$$k = 0,01720210.$$

La formule (I) nous donne

$$k\sqrt{p}\,t = \frac{1}{4}\int \frac{p^2}{\cos^4\frac{1}{2}\theta}\,d\theta = \frac{p^2}{2}\int\left(1+\tang^2\frac{1}{2}\theta\right)d.\tang\frac{1}{2}\theta$$

$$= \frac{p^2}{2}\left(\tang\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{3}\tang^3\frac{1}{2}\theta\right).$$

Posons

$$\tang\frac{1}{2}\theta = \Theta, \quad \tang\frac{1}{2}\theta' = \Theta',$$

et admettons que Θ' soit plus grand que Θ. Il vient

$$T = \frac{p\sqrt{p}}{2k}\left(\Theta' - \Theta + \frac{\Theta'^3 - \Theta^3}{3}\right)$$

$$= \frac{p\sqrt{p}}{2k}(\Theta' - \Theta)\left[1 + \Theta'\Theta + \frac{1}{3}(\Theta' - \Theta)^2\right].$$

Posons encore

$$1 + \frac{1}{4}(\Theta' + \Theta)^2 = \eta^2;$$

alors

$$T = \frac{p\sqrt{p}}{2k}(\Theta' - \Theta)\left[\eta^2 + \frac{1}{12}(\Theta' - \Theta)^2\right]$$

$$= \frac{p\sqrt{p}}{6k}\left\{\left[\eta + \frac{1}{2}(\Theta' - \Theta)\right]^3 - \left[\eta - \frac{1}{2}(\Theta' - \Theta)\right]^3\right\}.$$

D'un autre côté, si l'on projette la distance des deux positions observées sur l'axe de la parabole et sur une perpendiculaire, on obtient

$$c^2 = (r'\cos\theta' - r\cos\theta)^2 + (r'\sin\theta' - r\sin\theta)^2.$$

Cette relation, jointe aux valeurs

$$r = \frac{p}{2}(1 + \Theta^2),$$

$$\cos\theta = \frac{1 - \Theta^2}{1 + \Theta^2}, \quad \sin\theta = \frac{2\Theta}{1 + \Theta^2},$$

nous donne

$$c^2 = p^2(\Theta' - \Theta)^2\left[1 + \frac{1}{4}(\Theta' + \Theta)^2\right] = p^2(\Theta' - \Theta)^2\eta^2,$$

$$c = p(\Theta' - \Theta)\eta,$$

$$r + r' = p\left[\eta^2 + \frac{1}{4}(\Theta' - \Theta)^2\right],$$

$$r + r' + c = p\left[\eta + \frac{1}{2}(\Theta' - \Theta)\right]^2,$$

$$r + r' - c = p\left[\eta - \frac{1}{2}(\Theta' - \Theta)\right]^2.$$

De là il suit

$$T = \frac{1}{6k}\left[(r + r' + c)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r' - c)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Telle est la relation cherchée.

Le double signe provient de la quantité $\eta - \frac{1}{2}(\Theta' - \Theta)$ qui peut être positive ou négative; cette quantité a le même signe que

$$\eta^2 - \frac{1}{4}(\Theta' - \Theta)^2 = 1 + \Theta'\Theta = \frac{\cos\frac{1}{2}(\theta' - \theta)}{\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta'};$$

par conséquent, dans la valeur de T, on prendra le signe $-$ lorsque $\theta' - \theta < \pi$, et l'on prendra le signe $+$ lorsque $\theta' - \theta > \pi$.

La formule que nous venons de trouver constitue un théorème de la plus haute importance pour la détermination des orbites paraboliques des comètes. Il est connu sous le nom de *théorème de Lambert,* bien qu'Euler l'ait établi le premier, dans le septième volume des *Miscellanea Berolinensia* (1742). La démonstration que nous avons donnée est de M. Gauss (*Theoria motûs corporum cœlestium*).

7. *Proposons-nous le même problème pour une orbite elliptique ou hyperbolique dont on ne connaît qu'un seul élément, le grand axe.*

Soit

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

l'équation de l'orbite, dans laquelle a sera positif pour l'ellipse et négatif pour l'hyperbole; conservons pour le reste la notation du problème précédent.

On montre dans tous les Traités de Mécanique que, si l'on pose

$$(1) \qquad r = a(1 - e\cos u),$$

on a

$$t = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}(u - e\sin u),$$

k étant la même constante que dans le problème précédent quand on néglige le rapport de la masse du corps à celle du Soleil. Admettons que les quantités r, u, θ, t se rapportent à la première observation, les quantités analogues r', u', θ', t' à la seconde observation, et posons

$$\frac{u' - u}{2} = \beta, \quad \frac{u' + u}{2} = \beta_1,$$

$$t' - t = \mathrm{T}.$$

Si nous observons que

$$\sin u' - \sin u = 2\sin\beta\cos\beta_1,$$

nous trouvons d'abord

$$(2) \qquad \mathrm{T} = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{k}[\beta - e\cos\beta_1\sin\beta].$$

Nous allons nous procurer deux autres équations entre

Dans le cas de l'hyperbole, z et z_1 sont plus grands que l'unité, en sorte que notre formule se trouve compliquée d'imaginaires; pour les faire disparaître il faut remplacer $\operatorname{arc}\cos z$ et $\operatorname{arc}\cos z_1$ par leurs expressions logarithmiques,

$$\operatorname{arc}\cos z = \frac{1}{\sqrt{-1}}\log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{arc}\cos z_1 = \frac{1}{\sqrt{-1}}\log\left(z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}\right),$$

et mettre en évidence le signe de a.

On trouve ainsi

$$T = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}\left[\sqrt{z^2 - 1} \mp \sqrt{z_1^2 - 1} - \log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \pm \log\left(z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}\right)\right].$$

On n'affecte d'un double signe que les seuls termes en z_1, car T doit être positif, et z est plus grand que z_1. Les signes supérieurs répondent à $\theta' - \theta < \pi$, les signes inférieurs à $\theta' - \theta > \pi$. En effet, pour $\theta' - \theta = 0$, T doit être nul et $z = z_1$; donc, dans ce cas, ce sont les signes supérieurs qu'il faut prendre. De plus, T étant une fonction continue de $\theta' - \theta$, les signes des termes en z_1 ne peuvent changer qu'autant que ces termes s'annulent. Ils s'annulent pour $\theta' - \theta = \pi$, et quand $\theta' - \theta$ vient à surpasser π, les signes doivent changer, car T doit augmenter.

Ces formules étant indépendantes de l'excentricité, elles subsistent encore lorsque l'excentricité est nulle, c'est-à-dire lorsque l'ellipse se réduit à une portion de droite limitée aux deux foyers, et l'hyperbole à deux demi-droites terminées aux foyers. Ainsi l'on peut dire qu'une planète, pour parcourir dans son orbite un arc dont la corde est c et dont les extrémités sont à des distances du Soleil égales à r et r', emploie un temps égal à celui qu'elle mettrait pour arriver directement vers le Soleil de

la distance $\frac{r+r'+c}{2}$ à la distance $\frac{r+r'-c}{2}$, si elle était partie sans vitesse initiale d'une distance égale au grand axe de son orbite.

Comme application, *nous calculerons le temps qu'un corps pesant emploie pour tomber sur la Terre d'une hauteur donnée, en tenant compte de la variation que la pesanteur éprouve lorsque la distance au centre de la Terre diminue.*

Le foyer d'attraction est ici le centre de la Terre, le grand axe $2a$ est la distance initiale du mobile au centre, et la corde c est la hauteur dont le corps est tombé pendant le temps T.

On a donc

$$r = 2a, \quad r' = 2a - c, \quad z = -1, \quad z_1 = \frac{c-a}{a};$$

par suite (formule 5), si l'on suppose que le corps tombe sans vitesse initiale,

$$T = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}\left[\pi - \text{arc cos}\,\frac{c-a}{a} + \sqrt{\frac{2ac-c^2}{a^2}}\right],$$

$$T = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}\left[\text{arc cos}\,\frac{a-c}{a} + \sqrt{\frac{2ac-c^2}{a^2}}\right].$$

Lambert a démontré le premier cette belle propriété du mouvement dans les sections coniques, que *le temps nécessaire à parcourir la distance qui sépare deux points donnés peut s'exprimer indépendamment de l'excentricité* (*Insigniores orbitæ cometarum proprietates*, Aug. Vind., 1761).

LAPLACE, *Mécanique céleste*, liv. II, chap. IV, § 27.

8. *Lorsqu'un corps céleste passe d'une position déterminée à une autre position également connue, le rap-*

port du secteur décrit par le rayon vecteur, au triangle formé par le Soleil et les deux positions données, peut s'exprimer indépendamment du paramètre de l'orbite. Trouver l'expression de ce rapport pour les trois espèces d'orbites possibles.

Soient :

r, r' les distances du Soleil aux deux points donnés ;
c la distance qui sépare ces deux points ;
a le demi-grand axe de l'orbite ;
R le rapport cherché, et

$$z = \frac{2a - c - (r + r')}{2a}, \quad z_1 = \frac{2a + c - (r + r')}{2a}.$$

Par des calculs presque semblables à ceux de la question précédente, on trouve, pour une orbite elliptique,

$$R = \frac{\operatorname{arc}\cos z - \operatorname{arc}\cos z_1 - \sin(\operatorname{arc}\cos z) + \sin(\operatorname{arc}\cos z_1)}{(1 - z)\sin(\operatorname{arc}\cos z_1) - (1 - z_1)\sin(\operatorname{arc}\cos z)};$$

pour une orbite hyperbolique,

$$R = \frac{\sqrt{z^2 - 1} \mp \sqrt{z_1^2 - 1} - \log(z + \sqrt{z^2 - 1}) \pm \log(z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1})}{(z_1 - 1)\sqrt{z^2 - 1} \mp (z - 1)\sqrt{z_1^2 - 1}};$$

pour une orbite parabolique,

$$R = \frac{1}{3}\,\frac{(r + r' + c)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r' - c)^{\frac{3}{2}}}{(r + r' + c)(r + r' - c)^{\frac{1}{2}} \mp (r + r' - c)(r + r' + c)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dans les deux dernières formules on discernera les signes convenables par les règles données aux problèmes précédents.

GRUNERT, *Journal de Crelle*, 1837, t. XIV, p. 21.

9. *Développer la plus grande équation du centre dans le mouvement elliptique, suivant les puissances ascen-*

dantes de l'excentricité, et l'excentricité suivant les puissances ascendantes de la plus grande équation du centre.

On nomme *équation du centre* l'angle que forme le rayon vecteur du mobile, avec un rayon qui tournerait d'un mouvement uniforme et passerait aux sommets de la courbe en même temps que le premier.

Nommons n l'angle décrit dans l'unité de temps par ce second rayon, et conservons pour le reste la notation du problème 7.

A l'époque t l'équation du centre est égale à $\theta - nt$; son maximum, que nous représenterons par E, correspond à la valeur du rayon r qui vérifie l'équation

$$d(\theta - nt) = 0.$$

Or

$$r^2 d\theta = na^2\sqrt{1 - e^2}\, dt;$$

par suite,

$$d(\theta - nt) = \frac{a^2\sqrt{1 - e^2} - r^2}{a^2\sqrt{1 - e^2}}\, d\theta.$$

La valeur de r qui annule cette différentielle est

$$r = a(1 - e^2)^{\frac{1}{4}};$$

c'est la moyenne proportionnelle entre les deux demi-axes. Les valeurs correspondantes de θ et de u se déduisent des équations

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}, \quad r = a(1 - e\cos u).$$

On trouve

$$\cos\theta = -\frac{1 - (1 - e^2)^{\frac{3}{4}}}{e}, \quad \cos u = \frac{1 - (1 - e^2)^{\frac{1}{4}}}{e}.$$

Il s'agit de substituer ces valeurs dans l'équation

$$(1) \qquad E = \theta - nt = \theta - u + e \sin u,$$

et de développer le résultat suivant les puissances de e.

On a d'abord

$$(1 - e^2)^{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{32} e^4 - \frac{5}{128} e^6 - \ldots,$$

série convergente, puisque e est inférieur à l'unité.

Soit

$$x = \theta - \frac{\pi}{2}.$$

Le développement qui précède donnera

$$\sin x = -\cos\theta = \frac{3}{4} e + \frac{3}{32} e^3 + \frac{5}{128} e^5 + \ldots.$$

Si l'on développe par la formule de Maclaurin $x = \text{arc} \sin y$ suivant les puissances ascendantes de $y = \sin x$, il vient

$$x = \sin x + \frac{1}{2} \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{\sin^5 x}{5} + \ldots;$$

par conséquent,

$$x = \frac{3}{4} e + \frac{3}{32} e^3 + \frac{5}{128} e^5 + \ldots + \frac{1}{6}\left(\frac{27}{64} e^3 + \frac{81}{512} e^5 + \ldots\right)$$
$$+ \frac{3}{40}\left(\frac{243}{1024} e^5 + \ldots\right) + \ldots,$$

d'où

$$(2) \qquad \theta = \frac{\pi}{2} + x = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4} e + \frac{21}{128} e^3 + \frac{3409}{40960} e^5 + \ldots.$$

De même, on a

$$(1 - e^2)^{\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{32} e^4 - \frac{7}{128} e^6 - \ldots,$$

et, si l'on pose $y = -u + \frac{\pi}{2}$,

$$\sin y = \cos u = \frac{1}{4}e + \frac{3}{32}e^3 + \frac{7}{128}e^5 + \ldots.$$

On tire de là

$$y = \frac{1}{4}e + \frac{3}{32}e^3 + \frac{7}{128}e^5 + \ldots + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{64}e^3 + \frac{9}{512}e^5 + \ldots\right)$$
$$+ \frac{3}{40}\left(\frac{1}{1024}e^5 + \ldots\right) + \ldots,$$

$$(3) \qquad u = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}e - \frac{37}{384}e^3 - \frac{2363}{40960}e^5 - \ldots,$$

$$\sin u = \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{2.3.4} - \ldots$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}e^2 + \frac{37}{768}e^4 + \ldots\right) + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{256}e^4 + \ldots\right) + \ldots,$$

$$(4) \qquad \sin u = 1 - \frac{1}{32}e^2 - \frac{49}{2048}e^4 - \ldots$$

Substituant les valeurs (2), (3), (4) dans l'équation (1), il vient

$$(5) \qquad E = 2e + \frac{11}{48}e^3 + \frac{599}{5120}e^5 + \ldots.$$

On voit que E change de signe avec e; par suite e changera de signe avec E, c'est-à-dire que le développement de e suivant les puissances de E ne contiendra que des puissances impaires.

Posons donc

$$e = \frac{E}{2} + a\left(\frac{E}{2}\right)^3 + b\left(\frac{E}{2}\right)^5 + \ldots,$$

a, b, c, etc., désignant des coefficients indéterminés. Substituons cette valeur dans l'équation précédente, et

égalons les coefficients des mêmes puissances de E dans les deux membres; il vient

$$2a - \frac{11}{48} = 0, \quad 2b + \frac{11a}{16} + \frac{599}{5120} = 0,$$

d'où

$$a = -\frac{11}{96}, \quad b = -\frac{587}{30720}, \ldots.$$

Ainsi nous avons

$$e = \frac{E}{2} - \frac{11}{96}\left(\frac{E}{2}\right)^3 - \frac{587}{30720}\left(\frac{E}{2}\right)^5 - \ldots.$$

Quand on pousse les développements jusqu'à la neuvième puissance, on trouve

$$E = 2e + \frac{11}{3.2^4}e^3 + \frac{599}{5.2^{10}}e^5 + \frac{17219}{7.2^{15}}e^7 + \frac{2032363}{9.2^{22}}e^9 + \ldots,$$

$$e = \frac{E}{2} - \frac{11}{3.2^6}E^3 - \frac{587}{3.5.2^{10}}E^5 - \frac{40583}{5.7.9.2^{23}}E^7$$
$$- \frac{10407049}{5.7.9.9.2^{32}}E^9 + \ldots.$$

Les astronomes se servent de cette dernière formule pour corriger l'excentricité par l'observation de la plus grande équation du centre.

10. *Tandis qu'une comète décrit une orbite parabolique, on imagine un cercle variable qui passe constamment par le Soleil, la comète et le sommet de la parabole. Démontrer que le centre du cercle se meut d'un mouvement uniforme.*

NEWTON, *Principia*, lib. I, prop. 30.

11. *Un point matériel décrit une lemniscate de Jacques Bernoulli sous l'action d'un centre de forces placé au point double de la trajectoire. Déterminer la loi de*

la force et le temps employé à décrire une boucle de la lemniscate.

Soient :

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$ l'équation de la trajectoire;

μ l'attraction à l'unité de distance;

F la force d'attraction à la distance r;

C le double de l'aire décrite par le rayon vecteur dans l'unité de temps,

et T le temps employé à décrire une boucle.

On trouve

$$\mu = 3a^4C^2, \quad F = \frac{\mu}{r^7} \quad T = a^4\sqrt{\frac{3}{\mu}}.$$

12. *Un point matériel décrit une hyperbole équilatère sous l'action d'une force dirigée vers le centre de la courbe. Trouver la loi de la force et déterminer la position du mobile à une époque donnée.*

Soient

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\theta}$$

l'équation de l'hyperbole rapportée à son centre; μ, F, C les mêmes quantités que dans le problème précédent, et t le temps compté à partir de l'instant où le mobile est au sommet de l'hyperbole.

On trouve

$$\mu = -\frac{C^2}{a^4}, \quad \sin 2\theta = \frac{e^{4\sqrt{\mu}t} - 1}{e^{4\sqrt{\mu}t} + 1}, \quad F = \mu r;$$

d'où l'on voit que la force est répulsive.

13. *Un point matériel décrit une cissoïde de Dioclès sous l'action d'une force dirigée vers le sommet de la courbe. Déterminer la loi de cette force.*

Si l'on représente la trajectoire par l'équation

$$r = a\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta},$$

on trouve que la force cherchée est une attraction proportionnelle à

$$\frac{\text{coséc}^2\,\theta}{r^3} = \frac{\sqrt{a^2+r^2}}{r^4}.$$

14. *Un point matériel décrit une circonférence sous l'action d'un centre de forces placé sur la courbe. Déterminer la force et la vitesse en un point quelconque de la trajectoire.*

Si l'on nomme r la distance du mobile au centre de forces, μ l'attraction à l'unité de distance et F la force cherchée, on trouve

$$F = \frac{\mu}{r^5}, \quad v^2 = \frac{\mu}{2r^4}.$$

NEWTON, *Principia*, lib. I, prop. 7.

15. Plus généralement : *Un point matériel décrit une circonférence sous l'action d'un centre fixe situé dans l'intérieur du cercle, le rayon vecteur décrit des aires égales dans des temps égaux. Trouver l'expression de la force.*

Si l'on nomme a le rayon du cercle, b la distance de la circonférence au centre d'attraction mesurée perpendiculairement au diamètre qui passe à ce point, et C le double de l'aire décrite dans l'unité de temps, on trouve

$$F = \frac{8C^2a^2r}{(b^2+r^2)^3}.$$

16. *Un point matériel, sollicité par une force dirigée vers un centre fixe, se meut avec une vitesse inverse-*

ment proportionnelle à sa distance au centre. Déterminer la trajectoire.

On trouve que la trajectoire est une spirale logarithmique dont le centre des forces occupe le pôle.

RICCATI, *Comment. Bonon.*, t. IV, p. 184.

17. *Un point matériel est attiré vers un centre fixe par une force* F *telle, que, si l'on représente par* r *la distance du point matériel au centre et par* a, h *deux constantes, on a*

$$F = \frac{2a^2h^2}{r^5} + \frac{h^2}{r^3}.$$

Déterminer la nature de la trajectoire, et examiner en particulier le cas où le point matériel serait lancé d'une distance a, *avec une vitesse égale à* $\frac{h}{a}\sqrt{2}$, *dans une direction inclinée de* 45 *degrés sur le rayon vecteur.*

Admettons que l'angle polaire θ soit nul en même temps que la distance au centre, et nommons C le double de l'aire décrite par le rayon vecteur dans l'unité de temps.

L'équation générale de la trajectoire est

$$r = \frac{ah}{\sqrt{C^2 - h^2}} \sin \frac{\sqrt{C^2 - h^2}}{C}\theta;$$

dans le cas particulier que nous devons examiner, cette courbe se réduit à la spirale d'Archimède

$$r = a\theta.$$

18. *Un point matériel décrit une circonférence sous l'action d'une force attractive, inversement proportionnelle au carré de la distance et dirigée vers le centre de la courbe; lorsque le mobile est arrivé en un certain point de la trajectoire, l'attraction rapportée à l'unité*

de distance croît subitement dans le rapport de m à l'unité; lorsque le mobile repasse au même point, l'attraction croît encore dans le même rapport. Déterminer la trajectoire que le mobile décrit après ce second accroissement.

Cette trajectoire est une ellipse qui a pour excentricité

$$\frac{m^2 - 1}{m^2}.$$

19. *Un point matériel est attiré vers un centre fixe par une force proportionnelle à la distance. Déterminer la trajectoire et le mouvement du point.*

Le mobile décrit une ellipse, dont le centre coïncide avec le centre d'attraction. Son mouvement est celui de la projection d'un point qui parcourrait d'un mouvement uniforme et dans le même temps la circonférence dont l'ellipse est la projection orthogonale.

Ce résultat se prévoit sans calcul, si l'on observe que la force accélératrice peut être considérée comme la projection de la force accélératrice constante qui produirait le mouvement circulaire.

On voit, en se reportant à la proposition 11 de la page 189, qu'*un point matériel, attiré proportionnellement à la distance et à la masse par autant de points matériels fixes que l'on voudra, décrit une ellipse dont le centre est au centre de gravité des points attirants.*

NEWTON, *Principia*, lib. I, prop. 10, 64.

20. *Un point matériel, attiré vers un centre fixe par une force proportionnelle à la distance, est lancé d'un même point et avec la même vitesse suivant différentes directions situées dans un même plan. Montrer que le lieu du mobile est un ellipsoïde, et que le point de départ du mobile est un point ombilical de la surface.*

21. *Un point matériel soumis à l'attraction d'un centre fixe est lancé d'une distance a, avec une vitesse égale à v_0, dans une direction perpendiculaire à celle du rayon vecteur. Déterminer l'équation de la trajectoire et la durée* T *de la révolution, dans les deux hypothèses suivantes :*

$$F = \frac{\mu}{r^4}, \quad v_0^2 = \frac{2\mu}{3a^3},$$

$$F = \frac{\mu}{r^7}, \quad v_0^2 = \frac{\mu}{3a^6}.$$

On trouve, dans la première hypothèse,

$$r = a\cos^2\frac{1}{2}\theta, \quad T^2 = \frac{27\pi^2 a^5}{32\mu},$$

et dans la seconde hypothèse,

$$r^2 = a^2\cos^2\theta, \quad T = a^4\frac{2\sqrt{3}}{\mu}.$$

La première courbe est une épicycloïde engendrée par un cercle de rayon $\frac{a}{4}$ qui roule extérieurement sur un cercle égal.

La seconde courbe est une lemniscate de Jacques Bernoulli.

STADER, *Journal de Crelle*, t. XLVI; 1853.

22. *Un point matériel se meut sous l'action d'un centre fixe dont l'attraction est exprimée par la formule*

$$F = \frac{\mu}{r^2} + \frac{\nu}{r^3},$$

μ et ν étant des constantes. Trouver l'équation de la trajectoire.

Si l'on détermine convenablement les constantes intro-

duites par l'intégration, on arrive à l'équation

$$r = \frac{k}{1 + e \cos h\theta},$$

dans laquelle k, e, h sont des constantes, et

$$h^2 = 1 - \frac{\nu}{C^2},$$

C étant le double de l'aire décrite par le rayon vecteur dans l'unité de temps.

Cette équation représente la trajectoire d'un point qui parcourrait une ellipse en vertu de l'attraction du foyer, pendant que cette courbe, invariable dans sa forme, tournerait autour de son foyer avec une vitesse égale au produit de $\frac{1-h}{h}$ par la vitesse du mobile dans cette ellipse.

Si l'on pose

$$h = 0{,}991545,$$

cette équation représente à peu près la trajectoire de la Lune autour de la Terre supposée fixe. C'est pourquoi Clairaut, qui d'abord avait cru, par suite de calculs incomplets, que la loi d'attraction en raison inverse du carré de la distance ne suffisait pas pour expliquer le mouvement rapide du périgée de la Lune, fut conduit à supposer que, outre l'attraction dont on vient de parler, il existait une autre attraction en raison inverse du cube de la distance et très-faible. D'après ses idées, cette attraction était insensible pour les planètes à cause de leurs grandes distances, mais elle était sensible pour la Lune vis-à-vis de la Terre, et produisait en partie le mouvement du périgée. D'Alembert était arrivé au même résultat et confirmait Clairaut dans son erreur, lorsque celui-ci reconnut lui-même le défaut de ses premiers calculs, et montra que la loi de Newton seule rend compte de toute la vitesse du périgée de la Lune.

23. *Un point matériel, soumis à l'action d'un centre fixe qui l'attire suivant une fonction de la distance, est lancé dans une direction perpendiculaire au rayon vecteur, avec une vitesse presque égale à celle qu'il aurait en ce lieu si son mouvement était circulaire. Déterminer la valeur du rayon vecteur maximum ou minimum qui se présente en premier lieu après le départ.*

Soient :

$F = \frac{1}{r^2}\varphi\left(\frac{1}{r}\right)$ l'attraction à la distance r;

a la distance initiale du mobile au centre d'attraction;

a' la valeur cherchée du premier rayon vecteur maximum ou minimum;

$\frac{1}{1+\varepsilon}$ le rapport de la vitesse initiale à celle qui correspond au mouvement circulaire.

On trouve

$$a' = a\left[1 - \frac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{a}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{a}\varphi'\left(\frac{1}{a}\right)}\right].$$

24. *Un corps planétaire, abandonné sans vitesse initiale à l'attraction du Soleil, mettra pour tomber sur le centre de cet astre un temps égal à la demi-révolution d'une planète dont l'orbite aurait un grand axe égal à la hauteur de la chute.*

On trouve ainsi que la Lune mettrait en moyenne 115 heures 55 minutes pour tomber au centre de la Terre.

G. Santini, *Elementi di Astronomia*, t. II, p. 326.

25. *Soient p le périmètre d'une courbe fermée décrite par un point matériel sous l'action d'une force dirigée vers un centre fixe, ρ le rayon de courbure,* T *le temps*

de la révolution et C *le double de l'aire décrite par le rayon vecteur dans l'unité de temps. Démontrer qu'entre ces quantités existe la relation*

$$p = \mathrm{C}\int_0^{\mathrm{T}} \frac{dt}{\rho}.$$

SECTION III.

MOUVEMENT DANS UN MILIEU RÉSISTANT.

1. *Un point pesant est lancé avec une vitesse connue* v_0 *et sous une inclinaison donnée* α, *dans un milieu homogène dont la résistance est proportionnelle à la vitesse. Déterminer le temps* T *nécessaire au mobile pour atteindre sa plus grande hauteur.*

Prenons l'axe des y vertical et dirigé en sens contraire de la pesanteur; nommons k le rapport de la résistance à la vitesse.

L'équation du mouvement qui doit seule nous occuper est la suivante,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - k\frac{dy}{dt};$$

elle a pour intégrale

$$\log\left(g + k\frac{dy}{dt}\right) = -kt + \text{const.}$$

Si l'on détermine la constante par les données initiales, il vient

$$\log\frac{g + kv_0 \sin\alpha}{g + k\dfrac{dy}{dt}} = kt.$$

Lorsque le mobile est à sa plus grande hauteur, on a

$$\frac{dy}{dt} = 0;$$

par conséquent,

$$T = \frac{1}{k} \log\left(1 + \frac{k}{g} v_0 \sin\alpha\right).$$

2. *Déterminer le mouvement d'un projectile pesant, lancé dans un milieu dont la résistance est exprimée par* $a + bv^n$, *a, b désignant des constantes et* v *la vitesse.*

Si l'on prend l'axe des y vertical et dirigé en sens contraire de la pesanteur, les équations du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(a + bv^n)\frac{dx}{ds},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -(a + bv^n)\frac{dy}{ds} - g.$$

Multiplions la première équation par d^2y et la seconde par d^2x, puis retranchons les produits. Il vient

$$(a + bv^n)(dx\, d^2y - dy\, d^2x) = g\, ds\, d^2x;$$

d'où l'on tire, en posant

$$dx = ds \cos\omega, \quad dy = ds \sin\omega$$

et divisant par dt,

$$v(a + bv^n)\, d\omega = g\,(\cos\omega\, dv - v \sin\omega\, d\omega) = g\frac{d^2x}{dt},$$

ou

$$(1) \qquad g \cos\omega\, v^{-(n+1)}\, dv - (a + g \sin\omega)\, v^{-n}\, d\omega = b\, d\omega.$$

Telle est l'équation qu'il s'agit d'intégrer.

Soit K le facteur par lequel il faut multiplier le premier membre pour le rendre une différentielle exacte. Ce facteur doit être indépendant de v, car le second membre ne contient pas dv; par conséquent, la quantité dont le premier membre sera la différentielle est de la forme Ωv^{-n}, Ω ne contenant point v.

Égalons la différentielle de Ωv^{-n} au produit du premier membre par le facteur K; il vient les deux relations

$$K = -\frac{n\Omega}{g\cos\omega},$$

et

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = n\frac{\sin\omega\, d\omega}{\cos\omega} + \frac{na}{g}\frac{d\omega}{\cos\omega}$$

ou

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = -nd.\log\cos\omega + \frac{na}{g}d.\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\Omega = \cos^{-n}\omega.\operatorname{tang}^{\frac{na}{g}}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right).$$

Il résulte de là que l'intégrale de l'équation (1) est

$$\Omega v^{-n} = -\frac{n}{g}\int\frac{b\,\Omega\, d\omega}{\cos\omega}.$$

Cette formule subsiste encore lorsque b est une fonction quelconque de ω. Si a était une fonction de ω, il suffirait de changer $\operatorname{tang}^{\frac{na}{g}}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right)$ en $e^{\frac{n}{g}\int\frac{a\,d\omega}{\cos\omega}}$.

Ainsi la détermination de la vitesse est réduite à une simple quadrature.

Pour rendre les formules plus commodes, posons

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right) = r;$$

d'où

$$\cos\omega = \frac{2r}{r^2+1},\quad \sin\omega = \frac{r^2-1}{r^2+1},\quad \frac{d\omega}{\cos\omega} = \frac{dr}{r}.$$

Il vient

$$\Omega = 2^{-n} r^{n\left(\frac{a}{g}-1\right)}(r^2+1)^n,$$

$$2^n\Omega v^{-n} = -\frac{nb}{g}\int r^{n\left(\frac{a}{g}-1\right)}(r^2+1)^n\frac{dr}{r}.$$

Toutes les fois que n est un nombre entier positif, l'intégrale peut s'obtenir sous forme finie.

Supposons, par exemple, $\frac{a}{g} = \frac{n+2}{n}$, la formule devient alors

$$r^2(r^2+1)^n v^{-n} = -\frac{nb}{2g(n+1)}(r^2+1)^{n+1} + \text{const.}$$

Maintenant que v est déterminé en fonction de r, il nous est facile de donner les expressions de t, x, y en fonction de la même quantité au moyen des seules quadratures. En effet, nous avons déjà trouvé les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(a+bv^n)\frac{dx}{ds},$$

$$v(a+bv^n)\,d\omega = g\frac{d^2x}{dt}, \quad dx = ds\cos\omega;$$

on en tire aisément

$$dt = -\frac{ds\frac{d^2x}{dt}}{dx(a+bv^n)} = -\frac{v\,ds\,d\omega}{g\,dx} = -\frac{v\,d\omega}{g\cos\omega} = -\frac{v\,dr}{gr},$$

$$dx = -\frac{\frac{ds}{dt}\frac{d^2x}{dt}}{a+bv^n} = -\frac{\frac{ds}{dt}v\,d\omega}{g} = -\frac{v^2\,d\omega}{g} = -\frac{2v^2\,dr}{g(r^2+1)},$$

$$dy = (v^2\,dt^2 - dx^2)^{\frac{1}{2}} = -v^2\,dr\left[\frac{1}{g^2r^2} - \frac{4}{g^2(r^2+1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{v^2(r^2-1)\,dr}{gr(r^2+1)}.$$

Pour avoir les valeurs de t, x, y, il suffit de substituer dans ces formules la valeur de v en fonction de r et d'intégrer.

Si l'on pose

$$a = 0 \quad \text{et} \quad n = 2,$$

on a les formules que l'on donne dans tous les Traités de Mécanique.

La réduction aux quadratures réussit encore lorsque la résistance est exprimée par la formule

$$a + b \log v.$$

Au reste, cette hypothèse peut se déduire des formules précédentes, en écrivant $a - \frac{b}{n}$ et $\frac{b}{n}$ au lieu de a et b, et faisant ensuite $n = 0$. C'est ce que l'on reconnaît facilement, si l'on observe que la vraie valeur de la fraction $\frac{-1 + v^n}{n}$ pour $n = 0$ est $\log v$.

Jean Bernoulli fut provoqué par Keill à déterminer le mouvement d'un projectile dans un milieu homogène, lorsque la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. Il entreprit de résoudre le problème plus général où la résistance est proportionnelle à une puissance quelconque de la vitesse; bientôt il réduisit la solution à des quadratures, et eut la satisfaction de constater que Keill ne savait point résoudre la question qu'il proposait. Ses recherches furent publiées, conjointement avec celles de son neveu Nicolas Bernoulli, dans les *Acta eruditorum*, Lips., 1719, p. 216 (1). Plus tard, Legendre (2) apprit à ramener aux quadratures la détermination du mouvement d'un projectile, quand la résistance est égale à une constante plus un terme proportionnel au carré de la vitesse. On peut encore consulter, sur le problème balistique, Euler (3), Borda (4), Templehoff (5) et Moreau (6).

JACOBI, *Journal de Crelle*, t. XXIV, p. 25; 1842.

---

(1) Voir aussi J. BERN., *Opera*, t. II, p. 393.
(2) *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1782.
(3) *Ib.*, 1753.
(4) *Ib.*, 1769.
(5) *Ib.*, 1788-1789.
(6) *Journal de l'École Polytechnique*, XIe cahier, p. 204.

3. *Un point matériel se meut dans un milieu résistant sous l'action d'une force qui agit toujours dans une même direction. Déterminer la loi de la résistance du milieu, lorsqu'on connaît la trajectoire; et réciproquement, déterminer la trajectoire, lorsqu'on connaît la résistance.*

Prenons l'axe des y parallèle à la force et dirigé dans le même sens; nommons x, y les coordonnées du mobile à l'époque t, s l'axe qu'il a parcouru, Y la force qui le sollicite et R la résistance du milieu.

Les équations des composantes tangentielles et normales que nous avons rappelées au commencement de ce chapitre nous donnent

$$v\frac{dv}{ds} = -\mathrm{R} + \mathrm{Y}\frac{dy}{ds},$$

$$\frac{v^2}{\rho} = \mathrm{Y}\frac{dx}{ds},$$

ou, si l'on remplace ρ par sa valeur $\frac{ds^3}{dx^3} : \frac{d^2y}{dx^2}$,

$$v^2 = \mathrm{Y}\frac{ds^2}{dx^2} : \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Différentions cette équation par rapport à x, en observant que $\frac{ds^2}{dx^2} = 1 + \frac{dy^2}{dx^2}$; il vient

$$v\frac{dv}{dx} = \mathrm{Y}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\frac{ds^2}{dx^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{Y}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right),$$

$$v\frac{dv}{ds} = \mathrm{Y}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\frac{ds}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{Y}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right),$$

et, d'après la première équation,

$$R = -\frac{1}{2}\frac{ds}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right).$$

Cette formule résout le double problème que nous nous sommes proposé.

Corollaire I. — Si l'on suppose en particulier que la résistance soit proportionnelle au carré de la vitesse et à la densité D du milieu, on aura, en nommant μ une constante,

$$R = \mu D v^2 = \mu D \rho \frac{dx}{ds} Y,$$

et par conséquent,

$$D = \frac{R}{\mu Y}\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{ds^2}{dx^2}} = -\frac{1}{2\mu}\frac{dx}{ds}\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{Y}\frac{d}{dx}\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\mu}\frac{dx}{ds}\frac{d}{dx}\log\left(\frac{Y}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right).$$

Cette formule fait connaître la densité en un point quelconque du milieu, lorsque l'on donne la trajectoire; et réciproquement, elle fait connaître la trajectoire, lorsque l'on donne la densité.

Corollaire II. — Il est aisé de voir que $\rho\frac{dx}{ds}$ est la demi-corde du cercle de courbure menée par le point (x, y) parallèlement à l'axe des y; en sorte que, si l'on nomme q cette corde, on aura

$$v^2 = 2Y.\frac{1}{4}q.$$

Cette formule nous montre que la vitesse du mobile est égale, en chaque point, à celle qu'il gagnerait en tombant dans le vide d'une hauteur égale au quart de la corde de courbure, sous l'influence d'une force égale à celle qui le sollicite au point considéré.

La question qui nous occupe a été résolue d'une manière fautive par Newton, dans la première édition du livre des *Principes*, pour le cas d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse; l'erreur a été corrigée plus tard sur les indications de Jean Bernoulli.

NEWTON, *Principia*, lib. II, prop. 10.

JEAN BERNOULLI, *Acta erud.*, Lips., 1713; *Opera*, t. I, p. 515.

4. *Un point matériel se meut dans un milieu résistant sous l'attraction d'un centre fixe. Déterminer la loi de la résistance, lorsque l'on connaît la trajectoire; et réciproquement, déterminer la trajectoire, lorsque l'on connaît la résistance.*

Prenons le centre d'attraction pour origine des coordonnées polaires r et θ; nommons P la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente à la trajectoire, R la résistance du milieu et F la force d'attraction.

Nous avons les équations

$$v\frac{dv}{ds} = -\mathrm{R} - \mathrm{F}\frac{dr}{ds},$$

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{\mathrm{P}}{r}\mathrm{F}.$$

D'après la relation $\rho = r\frac{dr}{d\mathrm{P}}$, la seconde équation peut s'écrire

$$v^2 = \mathrm{P}\frac{dr}{d\mathrm{P}}\mathrm{F}.$$

Différentiant par rapport à s, il vient

$$v\frac{dv}{ds}=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\cdot\frac{1}{P^2}\left(P^3\frac{dr}{dP}F\right)$$
$$=-\frac{1}{P^3}\frac{dP}{ds}\left(P^3\frac{dr}{dP}F\right)+\frac{1}{2P^2}\frac{d}{ds}\left(P^3\frac{dr}{dP}F\right)$$
$$=-\frac{dr}{ds}F+\frac{1}{2P^2}\frac{d}{ds}\left(P^3\frac{dr}{dP}F\right).$$

Si l'on compare cette dernière formule à la première équation, on en conclut

$$\text{(A)}\qquad R=-\frac{1}{2P^2}\frac{d}{ds}\left(P^3\frac{dr}{dP}F\right).$$

Cette valeur résout le problème.

Corollaire I. — Supposons que la résistance soit proportionnelle au carré de la vitesse et à la densité D du milieu; alors nous avons, en nommant μ une constante,

$$R=\mu Dv^2=\mu DP\frac{dr}{dP}F,$$

et par conséquent (A),

$$\text{(B)}\quad D=-\frac{1}{2\mu}\frac{\frac{d}{ds}\left(P^3\frac{dr}{dP}F\right)}{P^3\frac{dr}{dP}F}=-\frac{1}{2\mu}\frac{d}{ds}\log\left(P^3\frac{dr}{dP}F\right).$$

Cette équation fait connaître la densité, lorsque la trajectoire est donnée, et réciproquement.

Corollaire II. — Si l'on nomme q la corde du cercle de courbure qui coïncide avec le rayon vecteur, on a

$$v^2=\frac{P}{r}\rho F=2F\cdot\frac{1}{4}q.$$

Cette relation nous fournit une remarque semblable à celle du corollaire II, dans le théorème qui précède.

Corollaire III. — On tire de la formule (B), en désignant par C une constante,

$$P^3 \frac{dr}{dP} F = C^2 e^{-2\mu \int D ds}, \quad F = \frac{C^2 \frac{dP}{dr}}{P^3} e^{-2\mu \int D ds}.$$

Cette équation nous fait connaître la force d'attraction, lorsque la trajectoire et la densité du milieu sont connues.

Newton, *Principia*, lib. II, prop. 17, 18.

Jean Bernoulli, *Opera*, t. IV, p. 347.

5. Comme applications des deux questions précédentes, nous indiquerons quelques résultats auxquels on parviendra sans difficulté par la simple application des formules.

Pour simplifier, nous supposerons la constante μ égale à l'unité. Nous conviendrons une fois pour toutes que l'axe des y est dirigé dans le sens de la pesanteur.

Un point pesant se meut dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la densité et au carré de la vitesse.

1° *La trajectoire est une demi-circonférence située au-dessus d'un diamètre horizontal,*

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

On trouve

$$R = \frac{3}{2}\frac{gx}{a}, \quad v^2 = g\sqrt{a^2 - x^2}, \quad D = \frac{\frac{3}{2}x}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Newton, *Principia*, lib. II, prop. 10, ex. 1.

2° *La trajectoire est une hyperbole de l'ordre* $n + 1$,

$$y = ax + \frac{b^{n+1}}{x^n}.$$

On trouve

$$D = \frac{\frac{1}{2}(n+2)x^n}{[x^{2n+2} + (ax^{n+1} - nb^{n+1})^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

EULER, *Mechan.*, t. I, p. 400.

6. *La trajectoire est une parabole de l'ordre n,*

$$y = -b + cx^n.$$

Déterminer la résistance.

On trouve

$$R = \frac{g(n-2)(1+n^2c^2x^{2n-2})^{\frac{1}{2}}}{2n(n-1)cx^{n-1}}.$$

7. *Un point matériel se meut sous l'attraction d'un centre fixe dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la densité et au carré de la vitesse.*

1° *L'attraction est proportionnelle à la $n^{ième}$ puissance de la distance, et le centre d'action est situé sur la trajectoire qui est une circonférence,*

$$r = 2a\cos\theta.$$

On trouve, en représentant par ν l'attraction à l'unité de distance,

$$R = \frac{1}{4}\nu(n+5)r^n\sin\theta,$$

$$D = \frac{1}{2}(n+5)\frac{\sin\theta}{r}.$$

2° *La loi de l'attraction est la même, et la trajectoire est une spirale logarithmique dont le pôle occupe le centre d'attraction,*

$$\theta = \tang\alpha\log r.$$

On trouve, en supposant que le mobile s'approche du

pôle,

$$R = \frac{1}{2} v(n+3)\cos\alpha . r^n,$$

$$D = \frac{1}{2}(n+3)\frac{\cos\alpha}{r}.$$

NEWTON, *Principia*, lib. II, prop. 15, 16.

8. *La trajectoire est une circonférence dont le centre est le point attirant, et la résistance du milieu est constante.*

Soient a le rayon de la circonférence, v_0 la vitesse initiale, h la résistance du milieu et s l'arc décrit dans le temps t.

On trouve

$$v^2 = v_0^2 - 2hs, \quad F = \frac{1}{a}(v_0^2 - 2hs).$$

A l'instant où la vitesse s'éteint,

$$s = \frac{v_0^2}{2h}, \quad t = \frac{v_0}{h}.$$

9. *La trajectoire est une spirale logarithmique dont le pôle occupe le centre d'attraction,*

$$\theta = \operatorname{tang}\alpha \log r;$$

la résistance est proportionnelle à la $n^{ième}$ puissance de la distance au pôle.

Soient a le rayon vecteur initial, v_0 la vitesse initiale et h la résistance à l'unité de distance.

On trouve, en supposant que le mobile s'approche du pôle,

$$F = \frac{(n+3)\cos\alpha . a^2 v_0^2 + 2h(r^{n+3} - a^{n+3})}{(n+3)\cos\alpha . r^3}.$$

EULER, *Mechan.*, t. I, p. 442.

CHAPITRE IV.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL ASSUJETTI A DES LIAISONS.

SECTION I.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL ASSUJETTI A RESTER SUR UNE COURBE FIXE ET PLANE.

Nommons s l'arc de la courbe que parcourt le mobile, X, Y et S les composantes de la force accélératrice parallèles aux axes coordonnés et à la tangente de la courbe. Le mouvement est déterminé par l'équation

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} = S,$$

qui a pour intégrale première

$$\text{(B)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{ds^2}{dt^2} = v^2 &= 2\int (X\,dx + Y\,dy) + \text{const.} \\ &= 2\int S\,ds + \text{const.} \end{aligned} \right.$$

Quand la force est dirigée vers un centre fixe, si l'on nomme F cette force et r la distance du mobile au centre, les équations précédentes deviennent

$$\text{(C)} \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} = \pm F\frac{dr}{ds},$$

$$\text{(D)} \qquad \frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = \pm 2\int F\,dr + \text{const.}$$

Le signe supérieur convient à une force répulsive et le signe inférieur à une force attractive.

1. *Un point matériel, assujetti à rester sur une spirale logarithmique et attiré vers le pôle par une force inversement proportionnelle au carré de la distance, part sans vitesse initiale d'une distance égale à a. Déterminer le temps nécessaire à ce mobile pour atteindre le pôle.*

Soient $\log \frac{b}{r} = \frac{\theta}{a}$ l'équation de la spirale et μ l'attraction à l'unité de distance.

La formule (D) nous donne

$$v^2 = -2\int_a^r \frac{\mu}{r^2}\,dr = 2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{dr^2}{dt^2} + r^2\frac{d\theta^2}{dt^2}.$$

Or, d'après l'équation de la spirale,

$$d\theta = -a\frac{dr}{r};$$

par conséquent,

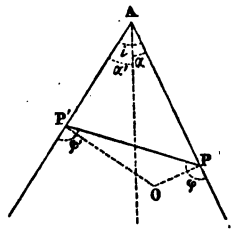
$$\frac{dr^2}{dt^2}(1 + a^2) = 2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right);$$

en sorte que le temps cherché a pour valeur

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{a(1+a^2)}{2\mu}}\int_0^a \frac{r\,dr}{\sqrt{ar - r^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a(1+a^2)}{2\mu}}\left[\frac{1}{2}a \operatorname{arc\,cos}\frac{a - 2r}{a} - \sqrt{ar - r^2}\right]_0^a \\ &= \pi\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1+a^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

2. *Deux points pesants réunis par une tige rigide et sans poids peuvent se mouvoir sur deux droites fixes situées dans un même plan vertical. Déterminer la durée des petites oscillations que le système exécute lorsqu'on vient à l'écarter légèrement de sa position d'équilibre.*

Fig. 48.



Soient :

P et P′ les deux points mobiles ;

c leur distance mutuelle ;

m et m' leurs masses respectives ;

x et x' leurs distances au point de concours A des droites fixes ;

a et a' les valeurs de ces distances qui correspondent à la position d'équilibre ;

φ et φ' les angles que la droite PP′ fait avec les deux droites fixes ;

i l'inclinaison mutuelle de ces deux droites ;

α et α' les angles qu'elles font avec la verticale ;

T l'action mutuelle des deux points qui est transmise par la tige PP′.

Les équations du mouvement sont les suivantes :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\cos\alpha - T\cos\varphi,$$

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2} = m'g\cos\alpha' - T\cos\varphi';$$

d'où l'on tire, par l'élimination de T,

$$m\cos\varphi'\frac{d^2x}{dt^2} - m'\cos\varphi\frac{d^2x'}{dt^2} = mg\cos\alpha\cos\varphi' - m'g\cos\alpha'\cos\varphi.$$

Pour exprimer φ et φ' en fonction de x et x', la Géométrie nous donne les deux relations

$$c\cos\varphi = x'\cos i - x,$$
$$c\cos\varphi' = x\cos i - x',$$

qui nous permettent d'écrire l'équation précédente sous la forme

$$-m(x' - x\cos i)\frac{d^2x}{dt^2} + m'(x - x'\cos i)\frac{d^2x'}{dt^2}$$
$$= -mg\cos\alpha(x' - x\cos i) + m'g\cos\alpha'(x - x'\cos i).$$

Remplaçons dans cette formule x, x' par $a + z$, $a' + z'$, et observons que le second membre est nul lorsqu'on y fait $x = a$, $x' = a'$, car ces valeurs sont celles qui correspondent à l'équilibre. Il vient, en négligeant les secondes puissances des petits écarts z, z' et de leurs dérivées,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &-m(a' - a\cos i)\frac{d^2z}{dt^2} + m'(a - a'\cos i)\frac{d^2z'}{dt^2} \\ &= -mg\cos\alpha(z' - z\cos i) + m'g\cos\alpha'(z - z'\cos i). \end{aligned}\right.$$

Or on peut exprimer z' en fonction de z, car on a l'équation

$$c^2 = a^2 + a'^2 - 2aa'\cos i$$
$$= (a + z)^2 + (a' + z')^2 - 2(a + z)(a' + z')\cos i,$$

laquelle devient, en négligeant les secondes puissances de z et de z',

$$(2)\qquad (a - a'\cos i)z + (a' - a\cos i)z' = 0.$$

On pourrait maintenant éliminer z' de l'équation (1), puis intégrer, et le problème serait résolu.

Cherchons la longueur l du pendule simple qui oscille dans le même temps que chacun des deux points de notre système.

Soient k, k', h des constantes. La théorie du pendule nous donne pour z et z' des valeurs de la forme

$$z = k \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}} + h\right), \quad z' = k' \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}} + h\right).$$

Si nous substituons ces valeurs dans les équations (1) et (2), et que nous éliminions du résultat le rapport $\frac{k}{k'}$, nous obtenons

$$l = \frac{m(a' - a\cos i)^2 + m'(a - a'\cos i)^2}{(ma\cos\alpha + m'a'\cos\alpha')\sin^2 i};$$

en sorte que la durée d'une oscillation $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ est connue.

La longueur l est susceptible d'une construction simple. En effet, supposons les points P et P′ dans leur position d'équilibre; par chacun de ces points, élevons une perpendiculaire sur la droite qui dirige son mouvement. Soit O l'intersection de ces deux perpendiculaires. Projetons le contour PAP′OP sur chacune des droites AP, AP′; il vient

$$\mathrm{OP}' \sin i = a - a'\cos i,$$
$$\mathrm{OP} \sin i = a' - a\cos i.$$

D'un autre côté, si nous nommons h la distance du centre de gravité des poids P et P′, dans leur position d'équilibre, à la droite horizontale qui passe au point A, nous avons

$$(m + m')h = ma\cos\alpha + m'a'\cos\alpha'.$$

Ces valeurs, substituées dans l'expression de l, nous donnent

$$l = \frac{m\overline{\mathrm{OP}}^2 + m'\overline{\mathrm{OP}'}^2}{(m + m')h}.$$

Il est aisé de construire cette valeur par les méthodes de la Géométrie élémentaire.

3. *Un point matériel, assujetti à rester sur une droite donnée, est sollicité par une force dirigée vers un centre fixe et fonction de la distance à ce centre. Trouver la durée des petites oscillations que le mobile exécute, lorsqu'on vient à l'écarter légèrement de sa position d'équilibre.*

Soient :

a la distance de la droite au centre des forces;

r la distance du mobile à ce centre;

x la distance du mobile au pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur la droite;

$f(r)$ la force correspondante à la distance r.

Prenons pour unité de masse celle du point mobile.

Le mouvement sera représenté par l'équation

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -2\int f(r)\,dr + \text{const.} \tag{1}$$

Si nous négligeons les quantités du troisième ordre en x, dans la valeur de $\frac{dx^2}{dt^2}$, $f(r) = f(\sqrt{a^2+x^2})$ doit être remplacé par $f(a)$ sous le signe $\int$, et par conséquent

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -2rf(a) + \text{const.}$$

Nommant ε la valeur initiale de x, cette équation peut s'écrire

$$\frac{dx^2}{dt^2} = 2f(a)\left(\sqrt{a^2+\varepsilon^2} - \sqrt{a^2+x^2}\right) = 2f(a)\frac{\varepsilon^2 - x^2}{2a}.$$

On en tire

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{f(a)}}\frac{dx}{\sqrt{\varepsilon^2 - x^2}},$$

$$t = \sqrt{\frac{a}{f(a)}}\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{\varepsilon},$$

$$x = \varepsilon\cos\left(t\sqrt{\frac{f(a)}{a}}\right);$$

en sorte que la durée d'une oscillation est

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{f(a)}}.$$

Si, par exemple, la force est une attraction proportionnelle à la distance, on a

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}},$$

μ étant l'attraction à l'unité de distance. C'est un résultat donné dans la *Mécanique* d'Euler, t. II, p. 91.

Les formules générales qui précèdent supposent que $f(a)$ n'est pas nul. Si cette condition n'était point remplie, il faudrait, dans la valeur de $\frac{dx^2}{dt^2}$, conserver des puissances de x supérieures à la seconde, et les résultats seraient changés.

Ce cas se présente, en particulier, lorsque la force centrale est le ressort d'un fil élastique lié d'une part au point mobile, d'autre part au centre fixe.

Soient T la tension du fil et λ son coefficient d'allongement (*); supposons que la longueur naturelle du fil soit égale à la distance du centre à la droite.

(*) *Voir* p. 167.

Nous avons

$$f(r) = \mathrm{T}, \quad r = a(1 + \lambda \mathrm{T});$$

d'où

$$f(r) = \frac{(r - a)}{\lambda a};$$

d'ailleurs,

$$r = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad dr = \frac{x\,dx}{r}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), il vient

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -\frac{2}{\lambda a}\int x\left[1 - a(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]dx.$$

Si l'on néglige les quatrièmes puissances de x,

$$x\left[1 - a(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{x^3}{2a^2};$$

il s'ensuit

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -\frac{1}{\lambda a^3}\int x^3 dx = \frac{1}{4\lambda a^3}(\varepsilon^4 - x^4),$$

$$dt = -2a\sqrt{\lambda a}\,\frac{dx}{\sqrt{\varepsilon^4 - x^4}}.$$

Posons

$$x = \varepsilon \cos\varphi.$$

Alors,

$$dt = \frac{2a\sqrt{\lambda a}}{\varepsilon}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}} = \frac{a}{\varepsilon}\sqrt{2\lambda a}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}},$$

$$\mathrm{T} = \frac{a}{\varepsilon}\sqrt{2\lambda a}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

L'intégrale définie est une fonction elliptique de première espèce dont le module est $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. *Deux points* A *et* B *étant donnés sur une même droite horizontale, trouver, dans le plan vertical mené par ces deux points, le lieu d'un troisième point* P *tel, que la somme des temps nécessaires à un point pesant pour parcourir les droites* AP *et* BP, *lorsqu'on le pose successivement en* A *et* B *sans vitesse initiale, soit égale à une quantité donnée* k.

Prenons l'origine des coordonnées sur la droite AB, à égale distance des extrémités, et dirigeons l'axe des y dans le sens de la pesanteur. Soient x, y les coordonnées du point P et $2a$ la distance AB.

Les formules du mouvement sur un plan incliné nous donnent de suite l'équation

$$\left[\frac{y^2+(a-x)^2}{\frac{1}{2}gy}\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{y^2+(a+x)^2}{\frac{1}{2}gy}\right]^{\frac{1}{2}}=k.$$

Élevons deux fois au carré pour rendre l'équation rationnelle, et posons

$$\frac{1}{2}k^2g=4c.$$

Il vient, après des réductions faciles,

$$\text{(E)}\qquad x^2=cy\,\frac{y^2-cy+a^2}{a^2-cy}.$$

Cette courbe se compose en général de deux branches, l'une tangente à l'origine à l'axe des x et asymptotique à la droite $y=\frac{a^2}{c}$, l'autre située au delà de cette dernière droite et formant une sorte d'ovale. Cette seconde branche

seule convient à notre problème; pour qu'elle existe, il faut que c soit plus grand que $2a$. La première branche est le lieu des points P tels, que la différence des temps employés à parcourir les droites AP, BP est égale à la constante k. En effet, si l'on rend rationnelle l'équation

$$\pm\left[\frac{y^2+(a-x)^2}{\frac{1}{2}gy}\right]^{\frac{1}{2}}\mp\left[\frac{y^2+(a+x)^2}{\frac{1}{2}gy}\right]^{\frac{1}{2}}=k^2,$$

on arrive encore à la formule (E).

Fuss, *Mém. de l'Acad. de Saint-Pétersbourg*, 1819.

5. *Déterminer la courbe sur laquelle doit glisser un point pesant, pour qu'il descende de hauteurs égales dans des temps égaux.*

On supposera que la tangente à l'origine des arcs parcourus est verticale.

Prenons l'origine au point où le mouvement commence, et l'axe des y vertical dirigé de haut en bas. Soit β la hauteur verticale que le mobile parcourt dans l'unité de temps.

Nous avons

$$\frac{ds^2}{dt^2}=2gy+\text{const.},$$

ou

$$\frac{ds^2}{dy^2}\,\frac{dy^2}{dt^2}=\left(1+\frac{dx^2}{dy^2}\right)\frac{dy^2}{dt^2}=2gy+\text{const.}$$

Or, à l'origine du mouvement, $\frac{ds}{dt}=\beta$, d'où il suit que la constante est égale à β^2; d'ailleurs, par hypothèse, on a toujours

$$\frac{dy}{dt}=\beta,$$

par conséquent,

$$\beta^2 \frac{dx^2}{dy^2} = 2gy,$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{2g}}{\beta} y^{\frac{1}{2}},$$

$$x = \frac{2\sqrt{2g}}{3\beta} y^{\frac{3}{2}}.$$

La courbe est une parabole de degré $\frac{3}{2}$; son axe est l'axe des y, et son point de rebroussement est à l'origine. On l'a nommée *isochrone*.

Leibnitz défia les disciples de Descartes de résoudre ce problème par les méthodes de leur maître, sans employer le calcul différentiel. En effet, ils ne purent y arriver. Alors Huyghens (*), Leibnitz (**) et Jacques Bernoulli (***) publièrent différentes solutions, les premières synthétiques, la dernière analytique.

6. *Un point matériel se meut sur une courbe avec une vitesse constante. Quelle doit être la courbe pour que la vitesse estimée suivant une droite donnée croisse d'une manière uniforme?*

Soient β la vitesse du mobile sur la courbe, c l'accroissement de la vitesse dans l'unité de temps suivant la droite donnée. Prenons cette droite pour axe des x, et le point où elle rencontre la courbe pour origine des coordonnées.

Nous avons

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = \beta^2,$$

(*) *Nouvelles de la République des Lettres*, octobre 1687.
(**) *Acta erud.*, Lips., 1689, p. 196 et suiv.
(***) *Ib.*, 1690, p. 217.

et

$$\frac{d^2x}{dt^2} = c;$$

d'où l'on tire, par intégration,

$$\frac{dx^2}{dt^2} = 2cx.$$

Éliminons dt entre cette dernière équation et la première. Il vient

$$2cx\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) = \beta^2,$$

et, en posant $\frac{\beta^2}{4c} = a$,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a - x}{x}},$$

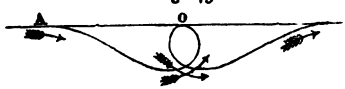
$$y = a \arccos \frac{a - x}{a} + \sqrt{2ax - x^2}.$$

C'est l'équation d'une *cycloïde* dont le cercle générateur a pour rayon a, et roule sur la droite $x = 2a$.

Cette propriété de la cycloïde résulte d'un travail d'Euler, qui fait partie des *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. X, p. 7. On trouvera des détails historiques sur cette question dans les *Bulletins de l'Académie des Sciences de Bruxelles*, t. IX.

7. *Un point pesant est lancé avec une vitesse connue, dans une direction horizontale* AO. *Quelle est la courbe sur laquelle le point doit se mouvoir pour que sa distance au point fixe* O *décroisse d'une manière uniforme?*

Fig. 49.



Soient r la distance du mobile au point O, θ l'angle que

ce rayon vecteur fait avec la direction OA et β la vitesse initiale.

On a, d'après l'équation (B) placée au commencement de ce chapitre,

$$\frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = \beta^2 + 2gr\sin\theta,$$

$$\frac{dr^2}{dt^2}\left(1 + r^2 \frac{d\theta^2}{dr^2}\right) = \beta^2 + 2gr\sin\theta.$$

A l'origine du mouvement, $\theta = 0$, $\frac{d\theta}{dr} = 0$, $\frac{dr}{dt} = \beta$; d'ailleurs $\frac{dr}{dt}$ est constant par hypothèse. Par conséquent l'équation du mouvement se réduit à la forme simple

$$\frac{dr}{\sqrt{r}} = \frac{\beta}{\sqrt{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}}.$$

On en tire, en nommant a la valeur initiale de r,

$$\sqrt{r} - \sqrt{a} = \frac{\beta}{2\sqrt{2g}} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}}.$$

Telle est l'équation de la courbe. Il faut nécessairement employer les quadratures pour la construire; car l'intégrale qui figure dans l'équation ne peut s'obtenir sous forme finie, elle dépend des fonctions elliptiques. La forme de la courbe est celle de la *fig.* 49, p. 369; elle comprend la droite AO. Sur la première moitié de la courbe le mobile s'approche uniformément du point O; sur la seconde moitié, il s'éloigne uniformément.

Leibnitz proposa ce problème aux géomètres de son époque, et nomma la courbe *paracentrique isochrone*. La question parut difficile, car la première solution se fit attendre pendant cinq années; elle est de Jacques Bernoulli et parut dans les *Acta eruditorum*, Lips., 1694. On

trouvera une généralisation de cette question et plusieurs autres problèmes du même genre dans un travail de Varignon qui fait partie des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1699, p. 1.

8. *Trouver une courbe telle, qu'un point pesant* P *posé sur cette courbe en un point donné* O *parcoure l'arc* OP *dans le même temps qu'il mettrait à parcourir la corde.*

Soient r la distance du mobile au point de départ, θ l'angle que ce rayon vecteur fait avec la verticale et s l'arc parcouru.

On a

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right) d\theta^2}{dt^2} = 2gr\cos\theta;$$

par conséquent, le temps employé à parcourir l'arc s est

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}}{\sqrt{r\cos\theta}} d\theta.$$

D'ailleurs le temps qui serait employé à parcourir la corde est égal à

$$\sqrt{\frac{2r}{g\cos\theta}}.$$

Écrivons que ces deux temps sont dans un rapport donné α, le problème sera plus général; puis différentions l'équation résultante par rapport à θ. Il vient

$$(\alpha^2 - 1)\cos^2\theta \frac{dr^2}{d\theta^2} + 2\alpha^2 \sin\theta\cos\theta\, r\frac{dr}{d\theta} + (\alpha^2\sin^2\theta - \cos^2\theta) r^2 = 0.$$

Cette équation est homogène en r et $\frac{dr}{d\theta}$; on pourra donc

l'intégrer. Pour cela, il suffit de diviser par r^2 et de poser

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = z;$$

alors on aura une équation du second degré en z que l'on résoudra.

Soient

$$z = f(\theta), \quad z = \varphi(\theta)$$

les deux racines.

Puisque

$$\frac{dr}{r} = z\,d\theta,$$

l'intégrale générale de l'équation proposée sera

$$r = Ce^{\int f(\theta)d\theta} + C'e^{\int \varphi(\theta)d\theta},$$

C et C′ étant deux constantes arbitraires.

Supposons maintenant que α soit égal à l'unité. L'équation différentielle devient

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta},$$

et si l'on intègre, on trouve l'équation

$$\log r = \frac{1}{2}\log\sin 2\theta + \frac{1}{2}\log c, \quad r^2 = c^2\sin 2\theta,$$

dans laquelle c est une constante arbitraire.

On voit que la courbe est une *lemniscate* de Jacques Bernoulli, qui a son centre au point de départ, et dont l'axe fait un angle de 45 degrés avec l'horizon.

Nous devons cette propriété de la lemniscate à Saladini (*Memorie dell' Instituto Nazionale Italiano*, t. I, p. 2).

La généralisation que nous avons indiquée est de M. Serret (*Journal de M. Liouville*, t. IX, p. 28; 1844).

9. *Un point matériel, assujetti à rester sur une courbe, part du repos, et se meut en vertu d'une force dirigée vers un centre fixe et proportionnelle à la distance. Quelle doit être la courbe pour que le temps employé à décrire l'arc soit égal au temps que le même mobile emploierait à décrire la corde?*

Soient :

s l'arc parcouru à partir du point de départ O;
a la distance du point O au centre d'attraction;
ρ la distance du même point au mobile;
θ l'angle des deux droites a et ρ;
r la distance du mobile au centre d'attraction.

On a

$$\frac{ds^2}{dt^2} = -2\int r\,dr + \text{const.} = (a^2 - r^2),$$

et puisque

$$r^2 = \rho^2 + a^2 - 2a\rho\cos\theta,$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2a\rho\cos\theta - \rho^2}.$$

Considérons d'abord le mouvement sur la corde. Il nous faut poser $ds = d\rho$, et considérer θ comme une constante. Il vient

$$t = \int_0^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{2a\rho\cos\theta - \rho^2}} = \text{arc sin}\,\frac{\rho - a\cos\theta}{a\cos\theta} + \frac{\pi}{2}.$$

Si maintenant nous considérons le mouvement sur la courbe, nous avons

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2},$$

$$t = \int \frac{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}}{\sqrt{2a\rho\cos\theta - \rho^2}}.$$

Égalons ces deux valeurs du temps, et différentions l'é-

quation résultante par rapport aux deux variables ρ et θ. Il vient

$$\frac{\cos\theta\, d\rho + \rho \sin\theta\, d\theta}{\cos\theta} = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2};$$

d'où l'on tire, en élevant au carré,

$$2 \operatorname{tang}\theta\, d\rho = \rho\,(1 - \operatorname{tang}^2\theta)\, d\theta,$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \cot 2\theta\, d\theta,$$

$$\rho^2 = c^2 \sin 2\theta.$$

La courbe est une *lemniscate*, comme dans le problème précédent.

Ossian Bonnet, *Journal de M. Liouville*, t. IX, p. 116; 1844.

10. *Trouver l'équation différentielle des courbes tautochrones pour un point sollicité par des forces qui agissent dans un même plan.*

On nomme *tautochrone* une courbe telle, qu'un point matériel, qui part du repos et se meut sur cette courbe sous l'action de forces données, emploie le même temps pour atteindre un point déterminé, quel que soit le point de départ.

Soient :

A le point où se termine le mouvement;

B le point de départ;

s l'arc qui sépare le mobile du point d'arrivée A, compté à partir de ce dernier point;

α la valeur initiale de l'arc s ou l'arc AB;

S la force motrice estimée suivant la tangente à la courbe dans le sens du mouvement et exprimée en fonction de l'arc.

Nous avons

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2\int_s^\alpha S\,ds;$$

en sorte que la durée du mouvement est

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_s^\alpha \frac{ds}{\left(\int_s^\alpha S\,ds\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette quantité doit être indépendante de α; en d'autres termes, l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{ds}{\left(\int_s^\alpha S\,ds\right)^{\frac{1}{2}}} = f(s, \alpha)$$

doit devenir indépendante de α lorsque l'on y pose $s = \alpha$. Or, pour cela, il est nécessaire que $f(\alpha, \alpha)$ soit homogène et de degré o par rapport à α; nous pouvons donc poser

$$f(s, \alpha) = \varphi\left(\frac{s}{\alpha}\right);$$

d'où

$$\frac{1}{\left(\int_s^\alpha S\,ds\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\alpha}\varphi'\left(\frac{s}{\alpha}\right).$$

Si l'on élève au carré et que l'on différentie par rapport à s, il vient

$$-S\,ds = d.\frac{\alpha^2}{\left[\varphi'\left(\frac{s}{\alpha}\right)\right]^2}.$$

Cette équation doit convenir à la courbe tautochrone; or l'équation de la courbe ne saurait dépendre de α, par

conséquent $\frac{\alpha^2}{\left[\varphi'\left(\frac{s}{\alpha}\right)\right]^2}$ est indépendant de α, ce qui exige que l'on ait

$$\left[\varphi'\left(\frac{s}{\alpha}\right)\right]^2 = \frac{\alpha^2}{s^2} \times \text{const.};$$

d'où

$$S = ks,$$

k désignant une constante indépendante de α.

Il suit de là

$$\frac{ds^2}{dt^2} = k(\alpha^2 - s^2),$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^\alpha \frac{ds}{\sqrt{\alpha^2 - s^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{k}},$$

$$k = \frac{\pi^2}{4\tau^2},$$

$$S = \frac{\pi^2}{4\tau^2} s, \quad \frac{dS}{ds} = \frac{\pi^2}{4\tau^2},$$

ou, si l'on exprime S en fonction de l'abscisse x,

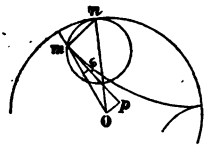
$$\frac{dS}{dx} = \frac{\pi^2}{4\tau^2}\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Telle est l'équation différentielle des courbes tautochrones.

Huyghens, le premier, s'est occupé des courbes tautochrones; il démontra que la cycloïde est tautochrone pour un mobile soumis à la seule force de la pesanteur (*Horolog. Oscill.*, P. II, prop. 25). Le problème inverse, qui consiste à déterminer directement les courbes tautochrones, fut attaqué d'abord par Newton dans le livre des *Principes*, lib. I, prop. 53. Plus tard, Euler s'en est occupé dans les *Commentaires de Saint-Pétersbourg*, 1729, et dans sa *Mécanique*, t. II, p. 211.

11. *Trouver les courbes tautochrones pour une force dirigée vers un centre fixe et proportionnelle à la distance.*

Fig. 50.



Soient :

μ l'attraction à l'unité de distance ;

r le rayon vecteur ;

φ l'angle que la tangente à la courbe fait avec le rayon vecteur ;

P la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente.

On a

$$S = \mu r \cos\varphi ;$$

en sorte que l'équation de la courbe est, d'après le problème précédent,

$$\frac{\mu d(r\cos\varphi)}{ds} = \frac{\pi^2}{4\tau^2},$$

ou, si l'on observe que $\cos\varphi\, ds = dr$,

$$\mu r \cos\varphi\, d(r\cos\varphi) = \frac{\pi^2}{4\tau^2} r dr.$$

On en tire

$$\mu r^2 \cos^2\varphi = \frac{\pi^2}{4\tau^2} r^2 + \text{const.},$$

$$\mu(r^2 - P^2) = \frac{\pi^2}{4\tau^2} r^2 + \text{const.}$$

Nommons c la valeur de P qui correspond à $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

La constante aura pour valeur $-\frac{\pi^2 c^2}{4\tau^2}$, et nous aurons

$$(F) \qquad \mu P^2 = \left(\mu - \frac{\pi^2}{4\tau^2}\right) r^2 + \frac{\pi^2 c^2}{4\tau^2}.$$

Telle est l'équation de la courbe.

Examinons les différents cas qui peuvent se présenter.

$\frac{\pi^2}{4\tau^2\mu} > 1$. — L'équation (F) représente l'*épicycloïde* que décrit un point d'une circonférence, lorsque celle-ci roule intérieurement sur une autre circonférence fixe dont le centre est au centre d'attraction.

En effet, soient R le rayon du cercle fixe, ρ celui du cercle mobile, m le point décrivant, n le point de contact des deux cercles et O le centre d'attraction.

La normale à l'épicycloïde au point m est la droite mn (p. 223), et, suivant que $R >$ ou $< 2\rho$, on a, avec le signe supérieur ou le signe inférieur,

$$R^2 = r^2 + \overline{mn}^2 \pm 2\,\overline{mn}\,.\,r\sin\varphi,$$

$$\frac{\overline{mn}}{P} = \pm\frac{2\rho}{R-2\rho}, \quad P = r\sin\varphi.$$

On en tire, par l'élimination de $\overline{mn}$ et de $\sin\varphi$,

$$R^2 = r^2 + P^2\left[\frac{4\rho^2}{(R-2\rho)^2} + \frac{4\rho}{R-2\rho}\right],$$

$$\mu P^2 = \left(\mu - \frac{\mu R^2}{4R\rho - 4\rho^2}\right) r^2 + \frac{\mu R^2 (R-2\rho)^2}{4R\rho - 4\rho^2},$$

équation qui coïncide avec la formule (F), quand on pose

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}\,\frac{\sqrt{R\rho - \rho^2}}{R} \quad \text{et} \quad c^2 = (R-2\rho)^2;$$

alors aussi la condition $R > \rho$, nécessaire pour une épicycloïde intérieure, revient à $\frac{\pi^2}{4\tau^2\mu} > 1$.

L'extrémité commune des arcs qui sont parcourus dans le même temps répond à $\varphi = 0$ et $r = P = c$; car un point matériel placé à cette extrémité doit y rester en repos.

Cette propriété de l'épicycloïde était connue de Newton (*Principia*, lib. I, prop. 52).

$\frac{\pi^2}{4\tau^2\mu} = 1$. — L'équation (F) se réduit à $P = c$; elle représente une droite située à la distance c du centre d'attraction.

$\frac{\pi^2}{4\tau^2\mu} < 1$. — L'étude de ce cas est moins facile. M. Puiseux a démontré que la courbe est une spirale formée de deux branches symétriques, s'éloignant indéfiniment du centre fixe, et qui jouissent de cette propriété d'être semblables à la développée de leur développée (*Journal de M. Liouville*, t. IX, p. 416 et 392; 1844).

Supposons maintenant que c soit nul.

$\frac{\pi^2}{4\tau^2\mu} > 1$. — La courbe est imaginaire.

$\frac{\pi^2}{4\tau^2\mu} < 1$. — La courbe est une *spirale logarithmique*.

En effet, nommons α l'angle constant que la tangente à cette spirale fait avec le rayon vecteur; nous aurons

$$P^2 = r^2 \sin^2\alpha, \quad \mu P^2 = (\mu - \mu\cos^2\alpha)\, r^2.$$

Il en résulte qu'un mobile assujetti à rester sur une spirale logarithmique, et attiré vers le pôle par une force proportionnelle à la distance, emploie toujours le même temps pour arriver au pôle, quel que soit son point de départ; ce temps est égal à $\frac{\pi}{2\cos\alpha\sqrt{\mu}}$.

Enfin considérons le cas où la force centrale serait répulsive.

Il faut changer le signe de μ dans la formule (F); alors elle nous représente toujours une épicycloïde dont le cercle mobile roule extérieurement sur le cercle fixe.

Les calculs sont les mêmes que pour la première épicycloïde, sauf le signe de ρ qui est changé.

La formule (F) est en réalité une équation différentielle; si l'on veut la mettre sous la forme ordinaire en usant des coordonnées polaires r et θ, il suffit de substituer à P sa valeur

$$r \sin \varphi = \frac{r^2 d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}.$$

On trouve ainsi

$$d\theta = \pm \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{\left(\frac{4\tau^2\mu}{\pi^2} - 1\right) r^2 + c^2}{r^2 - c^2}},$$

formule que l'on intègre sous forme finie, en représentant le radical par une variable auxiliaire.

Euler a traité ce problème dans sa *Mécanique*, t. II, p. 208.

12. *Déterminer directement les courbes tautochrones pour une force qui est perpendiculaire à une droite fixe et proportionnelle à une puissance de la distance à cette droite.*

Nous supposerons que la droite fixe passe par l'extrémité des arcs qui doivent être parcourus dans le même temps.

Prenons l'axe des y sur la droite fixe et l'axe des x dirigé en sens contraire de la force.

Soient μx^n la force à la distance x et h la valeur de x au point de départ.

Nous avons

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = 2\mu \int_x^h x^n dx = \frac{2\mu}{n+1} (h^{n+1} - x^{n+1});$$

en sorte que le temps employé pour arriver à l'origine est

$$\tau = \sqrt{\frac{n+1}{2\mu}} \int_0^h \frac{\frac{ds}{dx}\,dx}{(h^{n+1} - x^{n+1})^{\frac{1}{2}}}.$$

Il s'agit de trouver les valeurs de s en fonction de x qui rendent cette intégrale indépendante de h.

Posons

$$s = \varphi(x) \quad \text{et} \quad x = hu.$$

Il vient

$$\tau = \sqrt{\frac{n+1}{2\mu}} \int_0^1 \frac{\varphi'(hu)\,h\,du}{h^{\frac{n+1}{2}}(1 - u^{n+1})^{\frac{1}{2}}}.$$

$$= \sqrt{\frac{n+1}{2\mu}} \int_0^1 \frac{\varphi'(hu)(hu)^{\frac{1-n}{2}}\,du}{u^{\frac{1-n}{2}}(1 - u^{n+1})^{\frac{1}{2}}},$$

ou, si l'on fait $\varphi'(x)\,x^{\frac{1-n}{2}} = \psi(x)$,

$$\tau = \sqrt{\frac{n+1}{2\mu}} \int_0^1 \frac{\psi(hu)\,du}{u^{\frac{1-n}{2}}(1 - u^{n+1})^{\frac{1}{2}}}.$$

On doit avoir

$$\frac{d\tau}{dh} = 0,$$

ou

$$\int_0^1 \frac{\psi'(hu)\,u^{\frac{n+1}{2}}}{(1 - u^{n+1})^{\frac{1}{2}}}\,du = 0;$$

or cette condition, qui doit être remplie pour toute valeur de h, exige que $\psi'(hu)$ soit identiquement nulle;

autrement on pourrait prendre h assez petit pour que $\psi'(hu)$ conserve le même signe dans toute l'étendue de l'intégrale, et alors l'intégrale, ayant tous ses éléments positifs, ne saurait être nulle. Ce raisonnement suppose seulement que $\psi'(x)$ n'est pas de l'espèce de ces fonctions singulières qui changent de signe une infinité de fois, tandis que la variable x parcourt un petit intervalle dans le voisinage de o (*).

Ainsi l'on a

$$\psi'(x) = 0, \quad \psi(x) = \text{const.} = k,$$

$$\varphi'(x) = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = kx^{\frac{n-1}{2}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-1 + k^2 x^{n-1}}.$$

Telle est l'équation différentielle des courbes tautochrones.

On voit que $n - 1$ doit être négatif, sinon $\frac{dy}{dx}$ serait imaginaire pour de petites valeurs de x.

Soit

$$n - 1 = -m,$$

m sera positif, et l'on aura

$$dy = \pm\sqrt{\frac{k^2 - x^m}{x^m}}\,dx.$$

Le second membre est une différentielle binôme que l'on intégrera par les méthodes connues.

Lorsque

$$m = 0, \quad \text{ou} \quad n = 1,$$

on a une *ligne droite* parallèle à la direction des forces.

(*) $x \sin \frac{1}{x}$ est une de ces fonctions singulières.

Lorsque

$$m = 1, \quad \text{ou} \quad n = 0,$$

on a une *cycloïde*. Il en résulte que, *pour les corps pesants, la cycloïde est la seule courbe tautochrone dans le vide.*

Quand

$$m = 2, \quad \text{ou} \quad n = -1,$$

l'équation peut encore s'intégrer en quantités finies, mais elle ne répond pas au problème, car la valeur $n = -1$ est exclue de notre première intégration.

Enfin, si l'on admet que m ait une valeur fractionnaire $\frac{p}{q}$, l'équation de la courbe s'obtiendra sous forme finie toutes les fois que $\frac{q}{p}$ sera un nombre entier, ou un nombre entier augmenté de $\frac{1}{2}$. Posant, par exemple,

$$\frac{q}{p} = \frac{3}{2}, \quad \text{ou} \quad n = \frac{1}{3},$$

nous obtenons la courbe

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^2.$$

Toutes ces courbes sont tangentes à la droite fixe prise pour axe des y; elles coupent à angle droit la ligne $x = k^{\frac{2}{m}}$ et ne s'étendent pas au delà.

13. *Considérons une série de courbes semblables et semblablement placées, qui passent toutes par un même point* A, *et proposons-nous de trouver le lieu des extrémités des arcs qui seraient parcourus dans un même temps, par un point pesant posé sans vitesse initiale au sommet commun* A, *et assujetti à décrire successivement les diverses courbes.*

Le lieu géométrique ainsi défini porte le nom de *courbe synchrone* par rapport à la série des courbes semblables.

Soient pris le sommet A pour origine des coordonnées et la verticale dirigée dans le sens de la pesanteur pour axe des x. Nommons τ le temps que le mobile emploie pour atteindre la courbe synchrone, s l'arc qu'il décrit dans ce mouvement et x l'ordonnée de l'extrémité de cet arc.

On a

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2gx}},$$

ou

$$\tau = \int_0^x \sqrt{\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{2gx}}\,dx.$$

Dans cette formule, on remplacera $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur en x tirée de l'équation commune aux courbes semblables, laquelle contient un paramètre arbitraire a; on intégrera, puis on éliminera le paramètre a entre le résultat obtenu et l'équation des courbes semblables; l'équation résultante représentera la courbe synchrone.

Le plus souvent l'intégration dont on vient de parler ne pourra s'effectuer en quantités finies; alors il convient de modifier la méthode.

L'équation commune aux courbes semblables est de la forme

$$F\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) = 0;$$

admettons, pour plus de clarté, qu'on l'ait résolue par rapport à $\frac{y}{a}$, et soit

$$\frac{y}{a} = f\left(\frac{x}{a}\right).$$

Si l'on pose

$$\frac{x}{a} = z,$$

$\frac{dy}{dx}$ sera une fonction de z indépendante de a, et l'on aura

$$\tau = \sqrt{a} \int_0^z \sqrt{\frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{2gz}} dz,$$

$$a = \frac{\tau^2}{\left(\int_0^z \sqrt{\frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{2gz}} dz\right)^2};$$

d'où

$$x = \frac{\tau^2 z}{\left(\int_0^z \sqrt{\frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{2gz}} dz\right)^2},$$

$$y = \frac{\tau^2 f(z)}{\left(\int_0^z \sqrt{\frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{2gz}} dz\right)^2}.$$

Dans ces formules on donnera successivement à z différentes valeurs, et l'on calculera par les quadratures les coordonnées x, y des points correspondants de la courbe synchrone.

Le problème de la courbe synchrone est dû à Jean Bernoulli (*); Euler l'a discuté dans sa *Méchanique* (t. II, p. 47).

14. *Un point matériel, assujetti à rester sur une courbe plane, est sollicité par des forces situées dans le*

(*) *Acta erud.*, Lips., 1697, p. 206.

même plan et données à volonté. Déterminer quelle doit être la forme de la courbe, pour que le temps employé par le mobile à parcourir la distance qui sépare deux points donnés soit un minimum relativement au temps qui lui serait nécessaire sur toute autre courbe.

La courbe ainsi définie se nomme *brachistochrone* relativement au système de forces.

Soient x, y les coordonnées du mobile, s l'arc qu'il a parcouru à l'époque t, et α, β les valeurs de x correspondantes aux deux points donnés.

On a

$$dt = \frac{ds}{v};$$

par suite, si l'on pose

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

la durée du mouvement entre les deux points donnés sera

$$\tau = \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{1+p^2}}{v} dx.$$

Il faut déterminer la relation qui doit exister entre les coordonnées x et y, pour que cette intégrale soit un minimum; cette relation sera l'équation de la brachistochrone.

Nous résoudrons ce problème par le calcul des variations.

Soit

$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{v} = \mathrm{V}.$$

Concevons que dans V la vitesse v soit exprimée en fonction de x et de y, et nommons M et N les dérivées partielles de V par rapport à y et p. La méthode des va-

riations nous donne la formule

$$(1) \qquad M - \frac{dN}{dx} = 0,$$

dans laquelle $\frac{dN}{dx}$ représente la différentielle totale de N par rapport à x.

Pour exprimer cette formule en fonction des coordonnées x, y, nous avons d'abord

$$M = -\frac{1}{v^2}\sqrt{1+p^2}\,\frac{dv}{dy};$$

d'ailleurs, si nous représentons par X et Y les composantes des forces suivant les axes, nous avons

$$(2) \qquad v\,dv = X\,dx + Y\,dy;$$

en sorte que la dérivée partielle $\frac{dv}{dy}$ est égale à $\frac{Y}{v}$. Il en résulte

$$(3) \qquad M = -\frac{Y}{v^3}\sqrt{1+p^2} = -\frac{Y}{v^3}\frac{ds}{dx}.$$

Nous avons encore

$$N = \frac{p}{v\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{v}\frac{dy}{ds},$$

$$\frac{dN}{dx} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}\frac{dy}{ds} + \frac{1}{v}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{ds}\right),$$

ou, puisque la différentielle totale $\frac{dv}{dx}$ est égale à

$$\frac{1}{v}\left(X + Y\frac{dy}{dx}\right)$$

en vertu de l'équation (2),

$$(4) \qquad \frac{dN}{dx} = -\frac{1}{v^3}\left(X + Y\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{ds} + \frac{1}{v}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{ds}\right).$$

Substituant dans la formule (1) les valeurs données par les équations (3) et (4), il vient

$$v^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{ds}\right) = X\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & 2\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\dfrac{dx^2}{dy^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\int(X\,dx + Y\,dy) \\ & = \frac{X\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\dfrac{dy^2}{dx^2}}} - \frac{Y}{\sqrt{1+\dfrac{dy^2}{dx^2}}}. \end{aligned}\right.$$

Cette équation différentielle du second ordre représente la brachistochrone. Les deux constantes qu'introduira l'intégration permettront de faire passer cette courbe aux deux points donnés; alors le problème sera complétement résolu.

Quand on écrit l'équation (5) de manière que les deux membres soient positifs, le premier membre est égal à la force centrifuge $\frac{v^2}{\rho}$, ρ désignant le rayon de courbure, et le second membre est égal à la somme des forces appliquées, estimées suivant la direction de la force centrifuge. L'égalité de ces deux quantités constitue une propriété remarquable des brachistochrones découverte par Euler (*). Elle nous servira dans la question suivante.

La recherche de la brachistochrone pour un point pesant fut mise au concours par Jean Bernoulli (**), au

(* *Mechan.*, t. II, prop. 42.

(** *Acta erud.*, Lips., 1696, p. 269; 1697, p. 207. — *Mémoires de l'Acad. des Sciences de Paris*, 1718, p. 136. — *Opera*, t. II, p. 266.

mois de juin de l'année 1696; six mois étaient accordés pour résoudre le problème. Leibnitz (*) le résolut presque aussitôt, et communiqua sa découverte à Bernoulli. Comme aucune autre solution ne parvint au temps fixé, le délai fut prolongé jusqu'à Pâques; alors parurent les solutions de Jacques Bernoulli (**), de l'Hôpital (***) et une solution anonyme de Newton (****).

15. *Trouver la brachistochrone pour une force dirigée vers un centre fixe et proportionnelle à la distance.*

Soient :

r la distance du mobile au centre d'attraction;

φ l'angle que le rayon vecteur fait avec la tangente à la courbe;

ρ le rayon de courbure;

P la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente;

μ l'attraction à l'unité de distance;

a la valeur initiale de r.

L'attraction estimée suivant la normale est

$$\mu r \sin\varphi, \quad \text{ou} \quad \mu P;$$

par conséquent,

$$\frac{v^2}{\rho} = \mu P.$$

D'ailleurs, la vitesse initiale étant nulle, on a

$$v^2 = 2\mu \int_r^a r dr = \mu (a^2 - r^2);$$

en outre, la force étant attractive, la courbe doit tourner

(*) *Commercium epistolicum Leib. et Bern.*, epist. XXVIII. — *Acta erudit.*, Lips., 1697, p. 203.

(**) *Acta erud.*, Lips., 1697, p. 212.

(***) *Ib.*, p. 217.

(****) *Philos. Transact.*, 1697, n° 224, p. 389.

sa convexité vers le centre des forces; nous avons donc avec le signe convenable la relation géométrique

$$\rho = -r\frac{dr}{dP}.$$

Substituant ces valeurs dans la première équation, il vient

$$\frac{dP}{P} = -\frac{rdr}{a^2 - r^2};$$

d'où

$$\log P = \frac{1}{2}\log(a^2 - r^2) + \text{const.},$$

$$P^2 = C^2(a^2 - r^2).$$

C est une constante.

Comme on l'a vu (p. 378), cette équation représente une *épicycloïde* que l'on peut décrire en faisant rouler un cercle mobile dans l'intérieur d'un cercle fixe décrit du centre des forces comme centre avec un rayon égal à a.

Si la force centrale était répulsive, on arriverait à l'équation

$$P^2 = C^2(r^2 - a^2),$$

qui représente une *épicycloïde* dont le cercle générateur roule extérieurement sur le cercle fixe.

Au reste, si l'on veut obtenir l'équation de la brachistochrone dans le système des coordonnées polaires r et θ, il suffit de remplacer P par sa valeur

$$r^2\frac{d\theta}{dr}\left(1 + r^2\frac{d\theta^2}{dr^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

d'intégrer et de déterminer les deux constantes par la condition que la courbe passe aux deux points donnés.

EULER, *Mechan.*, t. II, p. 191.

Le problème suivant se ramène au mouvement d'un point matériel sur une courbe fixe.

16. *Un point matériel est attaché à l'extrémité d'un fil sans masse, situé dans un plan horizontal et parfaitement uni. Déterminer le mouvement du point lorsque l'autre extrémité du fil est entraînée sur une courbe donnée, avec une vitesse connue, et que le fil reste toujours tendu.*

Pour résoudre ce problème, nous allons d'abord déterminer le mouvement du point relativement à l'extrémité du fil; ce sera le mouvement d'un point matériel sur un cercle fixe. Ensuite il nous sera facile de passer au mouvement absolu par les formules de la transformation des coordonnées.

D'après le principe du mouvement relatif, nous devons considérer le point comme sollicité par une force accélératrice F, égale et contraire à celle qui serait capable de produire le mouvement réel de l'extrémité considérée comme fixe, si cette extrémité était un point matériel libre.

Premier cas. — *L'extrémité du fil décrit une ligne droite d'un mouvement uniforme.*

Ici $F = 0$; par suite le point matériel tourne d'un mouvement uniforme autour de l'extrémité du fil.

Soient l la longueur du fil, ω sa vitesse angulaire et u la vitesse de l'extrémité qui parcourt une ligne droite.

Si $u = l\omega$, le point matériel décrit une *cycloïde* dans son mouvement absolu; le rayon du cercle générateur est l, ce cercle roule uniformément sur la directrice.

Si $u \begin{matrix} < l\omega \\ = r\omega \end{matrix}$, le point matériel décrit dans son mouvement absolu une *cycloïde allongée;* c'est-à-dire que sa trajectoire est celle d'un point pris sur le prolongement du rayon d'un cercle qui roule sur une droite. Ici la distance

du point décrivant au centre du cercle est l, le rayon est r, et le cercle roule d'un mouvement uniforme.

Si $u \gtreqless l\omega$, le point matériel décrit dans son mouvement absolu une *cycloïde raccourcie;* c'est-à-dire que sa trajectoire est celle d'un point pris sur la longueur du rayon d'un cercle qui roule sur une droite. Les autres circonstances du mouvement sont les mêmes que dans l'hypothèse précédente, si ce n'est que r est plus grand que l.

Deuxième cas. — *L'extrémité du fil décrit une ligne droite d'un mouvement uniformément accéléré.*

Ici la force est constante en grandeur et en direction; par conséquent le mouvement relatif du point matériel sera de même nature que celui du pendule simple.

Troisième cas. — *L'extrémité du fil décrit une circonférence d'un mouvement uniforme.*

Soient ρ le rayon de cette circonférence, α la vitesse angulaire avec laquelle elle est décrite, et θ l'angle que la direction du fil fait avec le rayon ρ. Nous regarderons l'angle θ comme positif lorsqu'il sera décrit dans le sens de la vitesse α.

Ici la force F est parallèle au rayon de la circonférence décrite par l'extrémité du fil; son intensité est $\alpha^2\rho$; sa projection sur la tangente à l'arc décrit par le mobile dans son mouvement relatif est $-\alpha^2\rho\sin\theta$; l'arc décrit à l'époque t est $l(\alpha t + \theta - \theta_0)$, θ_0 désignant la valeur initiale de θ. Si l'on porte ces valeurs dans la formule $\frac{d^2s}{dt^2} = S$ (p. 358), il vient

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\alpha^2\rho\sin\theta.$$

C'est l'équation qui représente le mouvement du pen-

dule simple quand on suppose que la gravité est égale à $\alpha^2 \rho$. Le mouvement relatif au rayon de la circonférence décrite par l'extrémité du fil sera donc de même nature que celui du pendule.

L'équation admet la solution particulière

$$\theta = \text{const.} = \theta_0.$$

Ainsi, quand la vitesse angulaire initiale du point matériel est égale à celle de l'autre extrémité du fil, ce point décrit un cercle d'un mouvement uniforme dans son mouvement relatif et aussi dans son mouvement absolu. Le rayon de ce dernier cercle est

$$\sqrt{l^2 + r^2 - 2lr\cos\theta_0}.$$

Toutefois ceci suppose que la résultante des deux forces centrifuges qui naissent du mouvement relatif et du mouvement absolu tend à éloigner le point matériel de l'autre extrémité du fil. Cette condition serait inutile si le fil était remplacé par une tige rigide et sans poids.

Le premier cas que nous avons examiné fut le sujet d'une controverse entre Fontaine et Clairault. Fontaine admettait que le fil devait être constamment dirigé suivant la tangente à la trajectoire; Clairaut rejetait cette hypothèse. En réalité, elle suppose que la force d'inertie est détruite à chaque instant; cela aurait lieu si le mouvement du point matériel était produit par une suite de chocs dirigés dans le sens du fil, et que la vitesse acquise fût détruite à chaque instant par le frottement contre le plan. La courbe décrite dans l'hypothèse de Fontaine se nomme *tractoire*. Sa recherche est une question de Géométrie.

CLAIRAULT, *Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris*, 1736, p. 1.
EULER, *Nova Acta Acad. Petrop.*, 1784.

17. *Deux points pesants égaux, assujettis à se mou-*

voir sur la circonférence d'un cercle vertical, partent d'un même point avec des vitesses égales, mais à des instants différents. Démontrer que la ligne qui les joint après un temps quelconque enveloppe un cercle.

Soit L une droite horizontale située au-dessus du point de départ à la hauteur qui produirait la vitesse initiale. Les carrés des vitesses des deux mobiles au même instant sont proportionnels aux distances de ces points à la droite L. Les mêmes vitesses sont proportionnelles aux distances des mobiles au point de contact de la droite qui les joint avec son enveloppe; car on voit aisément que, lorsque deux cordes d'un même cercle font entre elles un angle infiniment petit, le rapport des segments déterminés sur l'une d'elles par leur point d'intersection est égal au rapport des petits arcs compris entre les deux cordes. Ainsi, les distances des deux mobiles à la droite L sont à chaque instant proportionnelles aux carrés des distances entre les mêmes mobiles et le point où la droite qui les joint touche son enveloppe.

De là il résulte que la courbe enveloppe est un cercle, lequel a la droite L pour axe radical (*) conjointement avec le cercle donné.

En effet, soient m, m' deux positions simultanées des

(*) L'axe radical de deux cercles est la droite qui passe par leurs deux points d'intersection; cette droite est réelle, lors même que les intersections sont imaginaires. Si les deux cercles sont représentés par les équations

$$x^2+y^2=a^2, \quad (x-\alpha)^2+y^2=b^2,$$

l'axe radical sera défini par l'équation

$$2\alpha x = a^2+\alpha^2-b^2.$$

Cette droite jouit d'un grand nombre de propriétés, parmi lesquelles nous citerons la suivante : les tangentes menées d'un même point de l'axe aux deux cercles sont égales et, par conséquent, les produits des segments déterminés sur deux sécantes sont égaux.

mobiles; A le cercle donné; A′ un cercle tangent à la droite mm' et tel, que l'axe radical des cercles A, A′ soit la droite L; δ la distance des centres des deux cercles; i le point de contact entre la droite mm' et le cercle A′; mh, $m'h'$ des perpendiculaires abaissées de m, m' sur la droite L; n le second point où la droite mh coupe le cercle A; p, q les points où la même droite coupe le cercle A′.

On a, d'après les propriétés de l'axe radical,

$$\overline{mi}^2 = \overline{mp}.\overline{mq} = (\overline{hp} - \overline{hm})(\overline{hq} - \overline{hm})$$
$$= \overline{hm}(\overline{hm} - \overline{hp} - \overline{hq} + \overline{hn}) = 2\delta.\overline{hm},$$

et de même

$$\overline{m'i}^2 = 2\delta.\overline{h'm'};$$

d'où

$$\frac{\overline{mh}}{\overline{m'h'}} = \frac{\overline{mi}^2}{\overline{m'i}^2}.$$

Or nous avons déjà prouvé que, si l'on désigne par i' le point de contact de la droite mm' avec son enveloppe, on a la relation

$$\frac{\overline{mh}}{\overline{m'h'}} = \frac{\overline{mi}^2}{\overline{m'i'}^2},$$

donc les points i, i' se confondent, c'est-à-dire que la droite mm' est encore tangente au cercle A′ dans une seconde position infiniment voisine de la première. Il s'ensuit qu'elle est tangente au même cercle dans toutes ses positions successives.

Si le mouvement est oscillatoire, le cercle enveloppe coupe le cercle donné. Si le mouvement embrasse une révolution entière, le cercle enveloppe est intérieur ou extérieur au cercle donné, suivant que le mouvement des deux points est de même sens ou de sens contraire; dans

ce dernier cas, nous supposons que les deux mobiles ne se heurtent point.

Partageons le temps d'une révolution complète en intervalles égaux, et lançons un point à chacun de ces intervalles. Les cordes qui joignent au même instant chacun de nos mobiles avec les mobiles adjacents enveloppent toutes un même cercle. De là résulte ce théorème de Géométrie : *Si l'on peut construire un polygone de n côtés inscrit dans un cercle donné et circonscrit à un second cercle donné, la construction peut s'effectuer quel que soit le point du cercle extérieur que l'on prenne pour premier sommet.*

La propriété du mouvement circulaire qui nous occupe ici est l'interprétation mécanique d'une propriété des fonctions elliptiques signalée par M. Jacobi, dans le *Journal de M. Liouville*, t. XI, 1846, p. 101. Cette même propriété est démontrée géométriquement dans la *Géométrie supérieure* de M. Chasles, p. 585.

The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 1854, febr., p. 7.

18. *Deux points matériels égaux, qui s'attirent en raison inverse du carré de la distance, sont obligés de se mouvoir sur deux droites rectangulaires. Trouver le temps nécessaire à chacun des mobiles pour arriver à l'intersection des deux droites, en supposant qu'ils partent du repos.*

Le temps cherché est le même pour les deux mobiles; si l'on nomme a la distance mutuelle des mobiles à l'instant où le mouvement commence, et μ l'attraction à l'unité de distance, sa valeur est

$$\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Au reste, quelle que soit la loi d'attraction, pourvu qu'elle ne dépende que de la distance, les deux mobiles arriveront en même temps à l'intersection des deux droites.

19. *Deux points pesants égaux et de même élasticité e sont placés sur un cercle vertical de part et d'autre du diamètre vertical, à 60 degrés de distance de son extrémité inférieure; au même instant on les abandonne à leur poids pour les laisser se mouvoir sur la courbe jusqu'à ce qu'ils aient épuisé toute leur vitesse par l'effet de leurs chocs successifs. Déterminer la somme des cordes de tous les différents arcs que chacun des mobiles va parcourir.*

Cette somme est

$$\frac{a}{1-e},$$

a désignant le rayon du cercle.

20. *Une petite bille parfaitement élastique, abandonnée sans vitesse initiale sur un plan incliné, parcourt une longueur donnée, puis rebondit sur un plan horizontal qui fait suite au premier plan. Trouver quelle doit être l'inclinaison du plan pour que la portée du bond soit un maximum.*

L'inclinaison du plan sur l'horizon doit être

$$\text{arc sin}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

21. *Un point pesant glisse sur une droite inclinée. On demande quelle doit être l'inclinaison de la droite pour que le chemin horizontal parcouru dans un temps donné soit un maximum.*

L'inclinaison doit être de 45 degrés.

22. *Sur un plan horizontal et parfaitement uni, un fil très-délié est attaché par l'un de ses bouts au contour d'un cercle fixe situé dans le même plan, et porte à l'autre bout un point matériel. Le fil étant tendu suivant une tangente au cercle, on imprime au point matériel une vitesse donnée perpendiculaire à la direction du fil, de sorte que celui-ci s'enroule sur la circonférence du cercle. Déterminer la vitesse du point à un instant quelconque et le temps qu'il emploiera pour atteindre la circonférence.*

Soient β la vitesse imprimée, b la longueur du fil, a le rayon du cercle, v et T la vitesse et le temps cherchés.

On trouve

$$v = \beta, \quad T = \frac{b^2}{2a\beta}.$$

23. *Un fil très-délié est attaché par l'une de ses extrémités au contour d'un cercle fixe situé dans un plan vertical, et porte un point pesant à son autre extrémité. Le fil étant tendu suivant une tangente au cercle, on imprime au point une vitesse donnée perpendiculaire à la direction du fil, en sorte que celui-ci s'enroule sur la circonférence du cercle. Déterminer la vitesse du point en un lieu donné, et la condition nécessaire pour que le fil entier s'enroule sur la circonférence.*

Admettons, pour nous fixer, que le fil soit primitivement dirigé suivant la tangente au sommet du cercle. Nommons θ l'angle décrit par le fil, et conservons pour le reste la notation du problème précédent.

On obtient l'équation

$$v^2 = \beta^2 + 2g[(b - a\theta)\sin\theta + a(1 - \cos\theta)].$$

Elle représentera le mouvement, tant que

$$v^2 + g(b - a\theta)\sin\theta$$

restera positif.

Enroulons le fil en le maintenant tendu, jusqu'à ce que l'angle décrit θ étant arrivé au troisième quadrant, la quantité $a \tang\theta$ soit égale à trois fois la longueur du fil qui n'est point enroulé. Alors arrêtons-nous, mesurons la hauteur h du point matériel au-dessus de la tangente au sommet du cercle, ainsi que la hauteur H du même point au-dessus de l'horizontale qui passe par l'extrémité inférieure du fil tendu en ligne droite. Pour que le fil entier s'enroule sur la circonférence, il faut que la vitesse initiale soit égale ou supérieure à $\sqrt{g(\mathrm{H} + 2h)}$. Cela revient à dire qu'il suffit que la vitesse initiale soit capable de faire franchir la position dans laquelle nous avons amené le point.

24. *Un point matériel, attiré vers un centre fixe proportionnellement à sa distance, est lancé d'un point donné, avec une vitesse connue, le long d'une courbe sur laquelle il doit se mouvoir, et qui est de telle nature, que la vitesse angulaire du rayon vecteur reste constante. Trouver l'équation de la courbe.*

Prenons le centre d'attraction pour origine des coordonnées polaires r et θ, et nommons a la valeur initiale de r correspondante à $\theta = 0$, β la vitesse initiale, μ^2 l'attraction à l'unité de distance et ω la vitesse angulaire.

Il vient

$$\left(\frac{\mu^2 + \omega^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}\theta = \arccos\left[\left(\frac{\mu^2 + \omega^2}{\mu^2 a^2 + \beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} r\right] - \arccos\left[\left(\frac{\mu^2 + \omega^2}{\mu^2 a^2 + \beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} a\right].$$

EULER, *Mechan.*, t. II, p. 138.

25. *Trouver les courbes tautochrones pour un point matériel qui est attiré vers un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.*

Si l'on conserve les notations du problème 11, il vient

$$P^2 = r^2 - \frac{\pi^2 r^5}{2\mu c \tau^2}(r - c).$$

EULER, *Mechan.*, t. II, p. 209.

26. *On donne une série de cercles tangents en un même point* A *et dont les centres sont situés dans la même direction* AO; *on place un point matériel au point* A, *et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'attraction du centre fixe* O. *Quelle doit être la loi de l'attraction, fonction de la distance, pour qu'un cercle étant choisi à volonté, le mobile emploie le même temps à parcourir chacune des cordes sur lesquelles on l'assujettirait successivement à se mouvoir?*

On trouve que l'attraction doit être proportionnelle à la distance; toutefois le centre du cercle ne doit pas être situé au delà du centre d'attraction, sinon le mobile ne pourrait pas parcourir toute la corde.

On peut supposer le centre d'attraction situé à l'infini; alors la force est constante en grandeur et en direction, et l'on retrouve ce théorème de Galilée : *Pour un point pesant assujetti à se mouvoir successivement sur plusieurs droites issues d'un même point et situées dans un plan vertical, la courbe synchrone est un cercle dont le sommet est à l'origine des droites.*

RISPAL, *Journal de M. Liouville*, 1847, t. XII, p. 225.

27. *On a une série de cycloïdes issues d'un même point et qui ont une même base horizontale; un point pesant est placé sans vitesse initiale à l'origine com-*

mune et assujetti successivement à décrire les différentes courbes. Déterminer la courbe synchrone, et prouver qu'elle coupe à angle droit toutes les cycloïdes.

Prenons l'origine des courbes pour origine des coordonnées, et la verticale dirigée dans le sens de la pesanteur pour axe des x; nommons τ le temps de la descente et a le rayon du cercle générateur de l'une quelconque des cycloïdes. L'équation de la courbe synchrone résultera de l'élimination de a entre les deux équations

$$\tau = \sqrt{\frac{a}{g}} \operatorname{arc\,cos} \frac{a-x}{a}, \quad y = a \operatorname{arc\,cos} \frac{a-x}{a} - \sqrt{2ax - x^2}.$$

On peut la construire par points d'une manière assez simple.

JEAN BERNOULLI, *Acta erud.*, Lips., 1697, p. 206.

28. *Trouver la brachistochrone pour un point matériel attiré vers un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.*

Conservant la notation du problème 15, on trouve

$$P^2 = C^2 \frac{a-r}{r}.$$

EULER, *Mechan.*, t. II, p. 191.

29. *Un poids pesant est abandonné sans vitesse initiale sur l'extrémité d'une cycloïde dont la base est horizontale. Montrer que, si l'on considère le point mobile comme lié au cercle générateur de la cycloïde, ce cercle roulera sur la base avec une vitesse angulaire constante et égale à* $\sqrt{\frac{g}{a}}$, *a désignant le rayon.*

30. *Un pentagone* ABCDE *est situé dans un plan vertical, le côté inférieur* CD *est horizontal. Montrer*

que les temps qu'un point pesant emploierait à descendre le long des droites BC, AC, EC *forment une progression géométrique.*

31. *Supposons une hyperbole équilatère dont l'axe transverse est vertical, et une circonférence décrite sur cet axe comme diamètre.*

La somme des carrés des temps qu'un point pesant met à descendre le long des deux droites qui joignent un point quelconque P *de la circonférence à deux points de l'hyperbole situés sur une même horizontale, est indépendante de la position du point* P *sur la circonférence; elle est égale au produit de* $\frac{8}{g}$ *par la distance de l'horizontale au centre de la courbe.*

SECTION II.

PRESSION EXERCÉE SUR UNE COURBE PLANE PAR UN POINT MATÉRIEL EN MOUVEMENT.

Un point matériel est assujetti à rester sur une courbe fixe et plane. Soient :

R la réaction de la courbe sur le point ;

X, Y les composantes des forces motrices suivant les axes ;

N la composante normale des forces motrices estimée en sens contraire de la réaction ;

ρ le rayon de courbure.

La masse étant égale à l'unité, on a

$$R = Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds} \pm \frac{1}{\rho}\frac{ds^2}{dt^2} = N \pm \frac{v^2}{\rho}.$$

On prend le signe supérieur quand le point se meut sur

le côté concave de la courbe, et le signe inférieur quand il se meut sur le côté convexe.

Cette formule fut donnée en premier lieu par l'Hôpital (*), à l'occasion du problème de la courbe d'égale pression.

1. *Un point matériel, assujetti à rester sur le côté concave d'une hyperbole, se meut sous l'action des deux foyers qui l'attirent en raison inverse du carré de la distance. Déterminer la réaction exercée par la courbe.*

Soient :

μ, μ' les attractions des foyers à l'unité de distance;
r, r' les deux rayons vecteurs;
r_0, r'_0 leurs valeurs initiales;
a, b les deux demi-axes;
φ l'angle que le rayon r fait avec la tangente à la courbe;
v_0 la vitesse initiale.

Nous supposons que le mobile parcourt la branche voisine du foyer auquel se rapportent les lettres dépourvues d'accent, et s'approche du sommet.

Nous avons

$$R = \left(\frac{\mu'}{r'^2} - \frac{\mu}{r^2}\right)\sin\varphi + \frac{v^2}{\rho},$$

$$v^2 = -2\int\left(\frac{\mu'}{r'^2}dr' + \frac{\mu}{r^2}dr\right) = \frac{2\mu'}{r'} + \frac{2\mu}{r} - \frac{2\mu'}{r'_0} - \frac{2\mu}{r_0} + v_0^2;$$

en outre la Géométrie nous donne

$$\rho\sin\varphi = \frac{rr'}{a}\,(**);$$

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*; 1700, p. 9.

(**) Cette relation consiste en ce que la corde du cercle de courbure qui coïncide avec le rayon r est égale à $\frac{2rr'}{a}$. On peut la démontrer aisément, soit par l'analyse, soit de la manière suivante.

Nommons θ, θ' les angles que deux rayons vecteurs, r, r', menés au

par conséquent,

$$\mathrm{R}\rho = \left(\frac{\mu'}{r'^2} - \frac{\mu}{r^2}\right)\rho \sin\varphi + v^2$$

$$= \frac{\mu'}{a}\,\frac{r+2a}{r'} - \frac{\mu}{a}\,\frac{r'-2a}{r} - \frac{2\mu'}{r'_0} - \frac{2\mu}{r_0} + v_0^2,$$

ou, d'après la relation $r' - r = 2a = r'_0 - r_0$,

$$\mathrm{R}\rho = \frac{\mu' r_0}{a r'_0} - \frac{\mu r'_0}{a r_0} + v_0^2.$$

Si la vitesse initiale est nulle, et qu'à l'origine du mouvement les deux attractions soient égales,

$$\frac{\mu}{r_0^2} = \frac{\mu'}{r'^2_0};$$

alors la réaction est nulle, c'est-à-dire que le mobile, s'il était libre, décrirait encore l'hyperbole.

---

même point m, font avec la direction du centre, et i l'angle de la normale au point m avec une normale infiniment voisine.

Nous avons

$$\rho = \frac{ds}{i}, \quad \sin\varphi\, ds = r\,d\theta = r'\,d\theta'.$$

De plus, quand les deux côtés d'un angle tournent en sens contraires de quantités représentées par $d\theta$ et $d\theta'$, la bissectrice de cet angle tourne de la quantité $\frac{d\theta - d\theta'}{2}$, quelle que soit d'ailleurs la translation du sommet; donc

$$i = \frac{d\theta - d\theta'}{2}.$$

On tire de ces équations

$$i = \frac{\sin\varphi\, ds}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right),$$

$$\rho \sin\varphi = \frac{2}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}} = \frac{2rr'}{r'-r} = \frac{rr'}{a}.$$

La même formule subsiste pour l'ellipse; pour la parabole elle devient

$$\rho \sin\varphi = 2r.$$

On voit que dans tous les cas la réaction est inversement proportionnelle au rayon de courbure. Cette circonstance se présentera toutes les fois que, sans rien changer aux forces motrices, on pourra disposer des circonstances initiales, de manière que le mobile décrive librement la courbe donnée.

En effet, dans la valeur

$$R = Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds} \pm \frac{v^2}{\rho},$$

les données initiales n'influent que sur un terme constant qui fait partie de v^2; d'où il résulte que, si l'on a $R = 0$ pour de certaines données initiales, pour d'autres données on aura

$$R = \frac{\text{const.}}{\rho}.$$

2. *Déterminer dans un plan vertical une courbe telle, qu'un point pesant assujetti à descendre le long de cette courbe exerce à chaque instant une même pression.*

On donne la pression R, la vitesse initiale v_0 et l'angle α que fait la verticale avec la tangente à la courbe au point de départ.

Soient pris l'origine au point de départ et l'axe des x dirigé dans le sens de la pesanteur.

On a

$$R = g\frac{dy}{ds} + \frac{v^2}{\rho},$$

$$v^2 = 2gx + v_0^2;$$

et, si l'on prend l'arc s pour variable indépendante,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{dx}{ds}.$$

Éliminant v et ρ, il nous vient l'équation

$$\frac{R}{\sqrt{2gx+v_0^2}}\frac{dx}{ds}=\sqrt{2gx+v_0^2}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{g}{\sqrt{2gx+v_0^2}}\frac{dy}{ds}\frac{dx}{ds},$$

qui a pour intégrale

$$\frac{R}{g}\sqrt{2gx+v_0^2}=\sqrt{2gx+v_0^2}\frac{dy}{ds}+\text{const.}$$

La constante se détermine par la condition qu'à l'origine $\frac{dy}{ds}$ soit égal à $\sin\alpha$; ainsi

$$\frac{dy}{ds}=\frac{R}{g}-\frac{v_0}{g}\frac{R-g\sin\alpha}{\sqrt{2gx+v_0^2}}.$$

Introduisant la coordonnée x au lieu de l'arc s, et posant

$$\frac{R}{g}=A,\quad \frac{v_0}{g}(R-g\sin\alpha)=B,\quad \text{et}\quad 2gx+v_0^2=z^2,$$

on arrive à l'équation

$$g\,dy=\frac{(Az-B)z\,dz}{\sqrt{(1-A^2)z^2+2ABz-B^2}},$$

qui peut s'intégrer en quantités finies, mais dont l'intégrale est trop compliquée pour avoir quelque intérêt.

Le problème de la *courbe d'égale pression* pour un mobile sollicité par la seule force de la pesanteur fut proposé par Jean Bernoulli (*), et résolu par l'Hôpital (**).

Commerc. epistolic. Leibnitzii et Bernoulli, epist. VII.

3. *Sur une courbe située dans un plan vertical on lance un point pesant assujetti à la parcourir, et l'on demande de déterminer la courbe de manière que la*

(*) *Acta erud.*, suppl., t. II, sect. VI, p. 291.
(**) *Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris,* 1700, p. 9.

pression soit proportionnelle à la $n^{\text{ième}}$ puissance de la distance à l'horizontale d'où le mobile aurait dû descendre pour acquérir au point de départ la vitesse qu'on lui a donnée.

Prenons pour axe des y l'horizontale dont il s'agit, pour axe des x la verticale dirigée dans le sens de la pesanteur, et nommons Kx^n la pression à la distance x.

Nous avons

$$Kx^n = g\frac{dy}{ds} + \frac{2gx}{\rho},$$

$$\rho = -\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)^{\frac{3}{2}} : \frac{d^2x}{dy^2};$$

d'où

$$Kx^n = g\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 2gx\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{d^2x}{dy^2},$$

$$Kx^{\frac{2n-1}{2}}\frac{dx}{dy} = g\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}\frac{dx}{dy}$$

$$- 2g\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)^{-\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{dy}\frac{d^2x}{dy^2}.$$

L'intégrale est, sans constante,

$$\frac{2}{2n+1}K.x^{\frac{2n+1}{2}} = 2gx^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

ou, si l'on pose $\frac{g}{K} = a$,

$$\text{(A)} \qquad \pm[(2n+1)^2a^2 - x^{2n}]^{\frac{1}{2}}dy = x^n dx.$$

Ainsi on arrive à une différentielle binôme qui, comme l'on sait, peut s'intégrer sous forme finie toutes les fois que $\frac{1}{2n}$ est un entier, ou un entier augmenté de $\frac{1}{2}$.

Si l'on avait ajouté une constante dans l'intégration, l'équation finie de la courbe n'aurait pu s'obtenir que dans un très-petit nombre de cas, outre ceux que nous avons indiqués.

Examinons quelques cas particuliers.

$n = 1$. — On trouve un *cercle* qui a son centre sur l'axe des y et dont le rayon est égal à $3a$.

$n = -1$. — On trouve une *chaînette*

$$x = \frac{1}{2a}(e^{ay} + e^{-ay}).$$

$n = \frac{1}{2}$. — On trouve une *cycloïde* dont la base est l'axe des y et qui a le rayon de son cercle générateur égal à $2a^2$.

$n = 2$. — La formule (A) devient l'équation de la *courbe élastique* de Jacques Bernoulli (*), ainsi nommée parce qu'elle représente la figure d'un ressort en équilibre sous l'action de certaines forces.

Dans ce cas l'intégrale dépend des fonctions elliptiques.

VARIGNON, *Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris*, 1710, p. 159.

4. *Un point matériel assujetti à rester sur une courbe donnée se meut sous l'action d'une force de direction constante. Trouver quelle doit être la loi de cette force, pour que la pression exercée sur la courbe soit la même en chaque point.*

Prenons l'origine sur la courbe au point où le mouvement commence, et l'axe des x parallèle à la force dont on cherche l'expression. Soient X cette force, v_0 la vitesse à l'origine et K la pression constante.

(*) *Acta erud.*, Lips., 1694, p. 272; 1695, p. 538.

Nous avons

$$K = X\frac{dy}{ds} + \frac{v^2}{\rho},$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\int_0^x X\,dx, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{dx}{ds}.$$

Éliminant ρ et v, il vient

$$K\frac{dx}{ds} = v_0^2\frac{d^2y}{ds^2} + X\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + 2\frac{d^2y}{ds^2}\int_0^x X\,dx,$$

et si nous intégrons après avoir multiplié par $\frac{dy}{ds}\,ds$,

$$K\int\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\,ds = \frac{1}{2}v_0^2\frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2}\int_0^x X\,dx.$$

Soit p la dérivée $\frac{dy}{dx}$ tirée de l'équation de la courbe. L'équation précédente peut s'écrire

$$\text{(A)}\quad \int_0^x X\,dx = -\frac{1}{2}v_0^2 + K\left(\frac{1}{p^2}+1\right)\left(\int\frac{p\,dx}{\sqrt{1+p^2}} + \text{const.}\right);$$

sous cette forme, sa différentielle relative à x nous donne l'expression de la force cherchée,

$$\text{(B)}\quad X = \frac{K}{p}\sqrt{1+p^2} - \frac{2K}{p^3}\frac{dp}{dx}\left(\int\frac{p\,dx}{\sqrt{1+p^2}} + \text{const.}\right).$$

La constante se détermine en posant $x = 0$ dans l'équation (A); elle est donnée par l'équation

$$\text{(C)}\quad 2K\left(\frac{1}{p^2}+1\right)\left(\int\frac{p\,dx}{\sqrt{1+p^2}} + \text{const.}\right) = v_0^2,$$

lorsqu'on y fait $x = 0$.

Supposons que la courbe donnée soit la *parabole*

$$x^2 = ay;$$

il suffit de poser $p = \frac{2x}{a}$ dans les équations (B) et (C), et l'on obtient

$$X = \frac{K}{4}\frac{a^3}{x^3}\left[1 - \left(1 - 2\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 + 4\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Si la courbe donnée était la *cycloïde*

$$y = a \arccos\frac{a-x}{a} - \sqrt{2ax - x^2},$$

on trouverait de la même manière

$$X = \frac{K}{3}\sqrt{\frac{2a}{x}}.$$

Dans ces deux cas particuliers la force est indépendante de la vitesse initiale.

EULER, *Mechan.*, t. II, p. 101 et suiv.

5. *En un lieu donné sur le côté convexe d'une ellipse dont le grand axe est vertical, on pose un point pesant; puis on l'abandonne à son poids. Déterminer le point où le mobile abandonnera la courbe.*

Prenons l'origine à l'extrémité supérieure du grand axe et l'axe des x dirigé dans le sens de la pesanteur. Soient $2a$ le grand axe, $2b$ le petit axe et x_0 l'ordonnée initiale.

L'ordonnée correspondante au point cherché est déterminée par l'équation

$$\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\left(\frac{x^3}{a^3} - 3\frac{x^2}{a^2}\right) - 3\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{a} + \frac{b^2}{a^2} + 2\frac{x_0}{a} = 0.$$

Si l'ellipse se réduit à un cercle de rayon a, l'équation devient

$$x - x_0 = \frac{a - x_0}{3}.$$

FONTANA, *Memorie della Società Italiana*, 1782, p. 175.

6. *On suppose un cercle vertical et un point pesant situé dans son intérieur; du sommet on lance le point le long de la courbe avec une vitesse donnée, et l'on demande la pression qu'il exerce sur la courbe.*

Soient a le rayon, v_0 la vitesse initiale et θ l'angle au centre décrit par le mobile.

On trouve

$$R = \frac{v_0^2}{a} + g(2 - 3\cos\theta).$$

Si la vitesse initiale est telle, qu'au premier instant la pression soit nulle, alors $v_0^2 = ag$,

$$R = 3g(1 - \cos\theta),$$

et lorsque $\theta = \pi$,

$$R = 6g,$$

c'est-à-dire que le mobile arrivant au bas du cercle exerce une pression six fois égale à son poids.

EULER, *Mechan.*, t. II, p. 65, coroll. VII.

7. *Un point matériel, assujetti à rester sur une ellipse convexe, se meut sous l'action de trois forces : la première est dirigée vers le centre et proportionnelle à la distance; les deux autres sont dirigées vers les foyers et inversement proportionnelles au carré de la distance. Déterminer la réaction de la courbe sur le point.*

Soient μ, μ', μ'' les attractions des foyers et du centre à l'unité de distance, a le demi-grand axe, V_0 la vitesse initiale et r_0, r'_0 les distances initiales aux foyers.

On trouve

$$R\rho = \frac{\mu r'_0}{ar_0} + \frac{\mu' r_0}{ar'_0} + \mu'' r_0 r'_0 - V_0^2.$$

Or, si l'on nomme v_0, v'_0, v''_0 les vitesses initiales qu'il faudrait imprimer au mobile supposé libre pour qu'il décrivît l'ellipse sous l'influence de chacune des trois forces

prise isolément, on a

$$v_0^2 = \frac{\mu r_0'}{a r_0}, \quad v_0'^2 = \frac{\mu' r_0}{a r_0'}, \quad v_0''^2 = \mu'' r_0 r_0';$$

par conséquent le mobile décrira librement la courbe sous l'influence des trois forces réunies, quand on aura

$$V_0^2 = v_0^2 + v_0'^2 + v_0''^2.$$

Cela résulte de la remarque faite au problème 1 (*voir* p. 342, prob. 19).

Notre formule première et la remarque citée nous donnent immédiatement un théorème général qui trouve ici son application.

Si plusieurs masses m, m', m'', etc., respectivement soumises à l'action des forces F, F′, F″, *etc., et partant d'un même point* A *avec des vitesses v_0, v_0', v_0'', etc., de grandeur différente mais de même direction, décrivent la même courbe* ACB; *la masse quelconque* M, *soumise à l'action de la résultante des forces* F, F′, F″, *etc., et partant du point* A *avec une vitesse* V_0 *ayant la même direction que les vitesses v_0, v_0', v_0'', etc., décrira encore la courbe* ACB, *pourvu que les forces* F, F′, F″, *etc., soient indépendantes du temps, et que la force vive initiale* MV_0^2 *de la masse* M *soit égale à la somme*

$$mv_0^2 + m'v_0'^2 + m''v_0''^2 + \ldots$$

des forces vives initiales des masses m, m', m'', etc. (*).

En effet, considérant chacune des masses m, m', m'',..., M comme assujettie à se mouvoir sur la courbe ACB, nous aurons, pour chacune des premières masses, une équation de la forme

$$0 = Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds} \pm \frac{mv_0^2}{\rho}.$$

(*) Ossian Bonnet, *Journal de M. Liouville*, t. IX, p. 113.

Ajoutant toutes ces équations, la somme des seconds membres représentera la réaction de la courbe sur la masse M; or cette somme est nulle, par suite la masse M décrit librement la courbe.

8. *On a une ellipse dont le grand axe est vertical et un point pesant situé dans l'intérieur à l'extrémité du petit axe; on se propose de lancer le point verticalement de bas en haut, de manière qu'après avoir quitté la courbe il passe au centre. Déterminer la vitesse de projection.*

Si l'on nomme $2a$ le grand axe, $2b$ le petit axe et v_0 la vitesse cherchée, on trouve

$$v_0 = \left[\frac{(8a^2 + b^2)g}{3a\sqrt{3}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

9. *Sur une courbe située dans un plan vertical on lance un point pesant assujetti à la parcourir, et l'on demande de déterminer successivement cette courbe :*

1° *De manière que la pression due à la seule force de la pesanteur soit proportionnelle à la $n^{ième}$ puissance de la distance actuelle du mobile à l'horizontale d'où il aurait dû descendre pour acquérir au point de départ la vitesse qu'on lui a donnée;*

2° *De manière que la pression due à la force centrifuge soit proportionnelle à la $n^{ième}$ puissance de la même distance;*

3° *De manière que la pression due à la force centrifuge soit dans un rapport donné n avec la pression due à la pesanteur.*

Prenons l'axe des x dirigé dans le sens de la pesanteur, et l'axe des y dirigé suivant l'horizontale dont on a parlé.

1° Soit Kx^n la pression due à la pesanteur pour une distance x de l'axe des y. Posons

$$\frac{g}{K} = a.$$

Il vient

$$dy\,(a^2 - x^{2n})^{\frac{1}{2}} = x^n\,dx.$$

2° Soit Kx^n la pression qui est due à la force centrifuge et s'exerce à la distance x. Posons encore

$$\frac{g}{K} = a.$$

Il vient

$$dy\,(4a^2n^2 - x^{2n})^{\frac{1}{2}} = x^n\,dx.$$

3° Soit a une constante arbitraire.

Il vient

$$dy\,(a^n - x^n)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{n}{2}}\,dx.$$

Ces formules sont presque en tout semblables à la formule (A) du problème 3; en sorte que ce dernier problème et les trois questions qui nous occupent conduisent aux mêmes courbes, sauf de légers changements.

VARIGNON, *Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris*, 1710, p. 156 et suiv.

SECTION III.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE COURBE PLANE DANS UN MILIEU RÉSISTANT.

1. *Proposons-nous d'étudier le mouvement d'un point pesant sur une cycloïde dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la vitesse. Nous supposons l'axe de la cycloïde vertical et la concavité tournée en haut.*

Prenons l'origine au sommet de la courbe qui est le point le plus bas, et l'axe des x dirigé en sens contraire de la pesanteur.

Nommons :

a le rayon du cercle générateur;
s l'arc de la cycloïde compté à partir du sommet;
k la résistance du milieu pour l'unité de vitesse;
c la valeur initiale de s;

et admettons que la vitesse initiale soit nulle.

Nous avons

$$\frac{dv}{dt} = g\frac{dx}{ds} - kv.$$

D'après les propriétés géométriques de la cycloïde,

$$s^2 = 8ax, \quad \frac{dx}{ds} = \frac{s}{4a};$$

d'ailleurs, si l'on suppose que l'arc décroisse quand la vitesse est positive,

$$v = -\frac{ds}{dt};$$

il en résulte que l'équation première peut s'écrire

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2s}{dt^2} + k\frac{ds}{dt} + \frac{g}{4a}s = 0.$$

On l'intègre par le procédé bien connu qui s'applique aux équations linéaires à coefficients constants.

Substituant $s = Ce^{rt}$, il vient

$$r^2 + kr + \frac{g}{4a} = 0, \quad r = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - \frac{g}{a}}}{2};$$

l'intégrale est donc

$$(1) \qquad s = e^{-\frac{k}{2}t}\left(Ce^{\frac{\sqrt{k^2-\frac{g}{a}}}{2}t} + C'e^{\frac{-\sqrt{k^2-\frac{g}{a}}}{2}t}\right).$$

Ici il convient de distinguer deux cas, suivant que le radical est réel ou imaginaire.

Supposons d'abord le radical imaginaire, ou $k < \sqrt{\frac{g}{a}}$; c'est le cas le plus conforme à ce qui se passe ordinairement dans la nature.

Si l'on pose

$$\sqrt{\frac{g}{a} - k^2} = \gamma,$$

la formule (1) prend la forme

$$s = e^{-\frac{kt}{2}}\left(\mathrm{A}\cos\frac{\gamma t}{2} + \mathrm{B}\sin\frac{\gamma t}{2}\right),$$

dans laquelle A et B sont des constantes que nous déterminons par la condition que, pour $t = 0$, on ait

$$s = c \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dt} = 0.$$

Il vient

$$c = \mathrm{A} \quad \text{et} \quad -\frac{k}{2}\mathrm{A} + \frac{\gamma}{2}\mathrm{B} = 0;$$

d'où

$$(2) \qquad s = ce^{-\frac{kt}{2}}\left(\cos\frac{\gamma t}{2} + \frac{k}{\gamma}\sin\frac{\gamma t}{2}\right).$$

Le temps T que le mobile emploie pour arriver au sommet se tire de l'équation

$$s = 0, \quad \cos\frac{\gamma \mathrm{T}}{2} + \frac{k}{\gamma}\sin\frac{\gamma \mathrm{T}}{2} = 0, \quad \tang\frac{\gamma \mathrm{T}}{2} = -\frac{\gamma}{k}.$$

Cette valeur de T est indépendante de la position initiale, et la même particularité se présente dans le second cas que nous examinerons plus loin; par conséquent, *la cy-*

cloïde est tautochrone dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la vitesse (*).

Admettons pour un instant que la résistance k soit très-petite. Alors $\frac{\gamma T}{2}$ sera très-peu supérieur à $\frac{\pi}{2}$, en sorte que, si l'on pose

$$\frac{\gamma T}{2} = \frac{\pi}{2} + u,$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang}\frac{\gamma T}{2} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} + u\right) = -\frac{1}{\operatorname{tang} u} = -\frac{\gamma}{k},$$

on aura sensiblement, en remplaçant dans la valeur de T u par $\operatorname{tang} u$, et négligeant les puissances de $\frac{a}{g}$ supérieures à la première,

$$\begin{aligned} T &= \frac{\pi}{\gamma} + \frac{2k}{\gamma^2} = \pi\left(\frac{g}{a} - k^2\right)^{-\frac{1}{2}} + 2k\left(\frac{g}{a} - k^2\right)^{-1} \\ &= \pi\left[\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{1}{2}k^2\left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{3}{2}} + \ldots\right] + 2k\left(\frac{a}{g} + \frac{a^2}{g^2}k^2 + \ldots\right) \\ &= \pi\sqrt{\frac{a}{g}} + 2k\frac{a}{g}. \end{aligned}$$

Ce temps est à peu près celui de la demi-oscillation descendante qu'un pendule cycloïdal exécute dans l'air lorsqu'on l'écarte légèrement de la verticale; il est un peu plus considérable que pour le pendule oscillant dans le vide.

La formule (2) nous donne

$$\frac{ds}{dt} = -v = -\frac{c}{2}e^{-\frac{kt}{2}}\left(\frac{k^2}{\gamma} + \gamma\right)\sin\frac{\gamma t}{2};$$

(*) Cette propriété de la cycloïde était connue de Newton; *Principia*, lib. II, prop. 26.

ainsi la vitesse est nulle, et le mobile cesse de monter pour commencer à descendre aux époques

$$t = 0, \quad \frac{2\pi}{\gamma}, \quad \frac{4\pi}{\gamma}, \quad \frac{6\pi}{\gamma}, \ldots.$$

Il suit de là que la durée d'une oscillation entière est égale à $\frac{2\pi}{\gamma}$. Si la résistance k est peu considérable, cette durée est sensiblement la même que dans le vide; car

$$\frac{2\pi}{\gamma} = \frac{2\pi}{\left(\frac{g}{a} - k^2\right)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi\left[\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{1}{2}k^2\left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{3}{2}} + \ldots\right]$$

$$= \text{à peu près } 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Substituant dans la formule (2) les valeurs de t pour lesquelles v s'annule, on obtient les amplitudes des demi-oscillations successives,

$$c, \quad ce^{-\frac{k}{\gamma}\pi}, \quad ce^{-\frac{2k}{\gamma}\pi}, \quad ce^{-\frac{3k}{\gamma}\pi}, \ldots.$$

Ces arcs décroissent en progression géométrique, et ils sont tous parcourus deux fois, sauf le premier; d'où il suit que le chemin total parcouru par le mobile avant d'arriver au repos est

$$c + 2c\frac{e^{-\frac{k}{\gamma}\pi}}{1 - e^{-\frac{k}{\gamma}\pi}} = c\frac{e^{\frac{k}{\gamma}\pi} + 1}{e^{\frac{k}{\gamma}\pi} - 1}.$$

Venons au second cas : le radical $\sqrt{k^2 - \frac{g}{a}}$ est réel, $k > \sqrt{\frac{g}{a}}$.

Soit

$$\sqrt{k^2 - \frac{g}{a}} = \gamma.$$

La formule (1) devient

$$s = Ce^{-\frac{k-\gamma}{2}t} + C'e^{-\frac{k+\gamma}{2}t}.$$

On doit déterminer les constantes C, C′ par la condition que, pour $t = 0$, on ait

$$s = c, \quad \frac{ds}{dt} = 0;$$

alors on trouve

$$s = \frac{c}{2\gamma}\left[(k+\gamma)e^{-\frac{k-\gamma}{2}t} - (k-\gamma)e^{-\frac{k+\gamma}{2}t}\right].$$

Cette valeur de s ne s'annule que pour $t = \infty$; par conséquent le mobile ne dépassera pas le sommet de la cycloïde, et même il ne l'atteindra jamais.

D'après la dernière équation, nous avons

$$\frac{ds}{dt} = -v = \frac{c(k^2-\gamma^2)}{4\gamma}\left(e^{-\frac{k+\gamma}{2}t} - e^{-\frac{k-\gamma}{2}t}\right),$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{dv}{dt} = \frac{c(k^2-\gamma^2)}{8\gamma}\left[(k-\gamma)e^{-\frac{k-\gamma}{2}t} - (k+\gamma)e^{-\frac{k+\gamma}{2}t}\right]$$

$$= \frac{c(k^2-\gamma^2)}{8\gamma}e^{-\frac{k-\gamma}{2}t}\left[(k-\gamma) - (k+\gamma)e^{-\gamma t}\right].$$

Ces formules nous montrent que la vitesse croît depuis l'instant du départ jusqu'à l'époque t donnée par l'équation

$$e^{-\gamma t} = \frac{k-\gamma}{k+\gamma}, \quad \text{ou} \quad t = \frac{1}{\gamma}\log\frac{k+\gamma}{k-\gamma}.$$

A partir de cette époque la vitesse décroît et converge vers o.

Enfin, si l'on suppose que le radical $\sqrt{\frac{g}{a} - k^2}$ soit nul, on trouve, en recourant à l'équation (A),

$$s = ce^{-\frac{k}{2}t}\left(1 + \frac{k}{2}t\right).$$

$$\frac{ds}{dt} = -\left(\frac{k}{2}\right)^2 cte^{-\frac{k}{2}t},$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \left(\frac{k}{2}\right)^2 ce^{-\frac{k}{2}t}\left(\frac{k}{2}t - 1\right).$$

Ces formules nous montrent que le mobile ne peut dépasser le sommet de la courbe, et s'en approche indéfiniment sans pouvoir l'atteindre. La vitesse est un maximum à l'époque $t = \frac{2}{k}$.

2. *Déterminer le mouvement du pendule légèrement écarté de la verticale, dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la vitesse.*

Soient a la longueur du fil, θ l'angle qu'il fait avec la verticale et k la résistance du milieu.

On a

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\theta - kv,$$

ou, si l'on remplace $\sin\theta$ par θ et v par sa valeur $-a\frac{d\theta}{dt}$,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{a}\theta = 0.$$

Cette équation est tout à fait semblable à l'équation (A) du problème précédent, si ce n'est que l'arc s se trouve remplacé par l'angle θ, et le double du diamètre du cercle

générateur $4a$ par la longueur du fil a. Sauf ces changements de noms, la discussion précédente s'applique mot pour mot.

Ce problème donne la loi des petites oscillations du pendule dans l'air; car, lorsque la vitesse est très-petite, on peut sans erreur sensible admettre que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse. Dans ce cas, la résistance k est peu considérable; elle est inférieure à $\sqrt{\frac{g}{a}}$; on peut même négliger son carré. Alors, comme nous l'avons vu, la durée d'une demi-oscillation descendante est un peu plus considérable que dans le vide; mais la durée d'une oscillation entière est la même.

Au reste, pour juger de l'exactitude de ces résultats, il suffit de réduire en nombres les formules rigoureuses données dans le problème précédent. Nous nous servirons pour cela d'une expérience de Borda. La valeur initiale c de l'angle θ était un tiers de degré environ, l'amplitude des oscillations diminuait à peu près en progression géométrique; après 1800 oscillations, elle n'était réduite qu'aux deux tiers de sa valeur primitive.

Ainsi, en conservant les notations du problème précédent, on a

$$e^{-\frac{1800k\pi}{\gamma}} = \frac{2}{3},$$

$$1800k\pi = \gamma \log \frac{3}{2} = \gamma(0,40546).$$

Remplaçons k par sa valeur tirée de l'équation

$$\sqrt{\frac{g}{a} - k^2} = \gamma.$$

Il vient

$$\overline{1800}^2 \pi^2 \left[1 - \left(\gamma\sqrt{\frac{a}{g}}\right)^2\right] = \left(\gamma\sqrt{\frac{a}{g}}\right)^2 \overline{0,40546}^2;$$

d'où l'on tire

$$\gamma\sqrt{\frac{a}{g}} = 1,00000000257.$$

On voit par là que la durée d'une oscillation est

$$\frac{2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}}{1,00000000257},$$

ou à peu près

$$2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}(1 - 0,00000000257),$$

ce qui ne diffère presque pas de la durée d'une oscillation dans le vide,

$$2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Poisson, *Traité de Mécanique*, 2e édit. t. I, p. 348.

3. *Déterminer le mouvement du pendule dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse.*

Conservons les notations du problème précédent. Nous avons

$$(1) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} - ak\frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{g}{a}\sin\theta = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2ak\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{2g}{a}\sin\theta.$$

Si l'on regarde θ comme la variable et $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ comme la fonction, cette équation est linéaire et du premier ordre. On l'intègre par la méthode connue.

Substituant

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = e^{r\theta}\int w\,d\theta,$$

il vient

$$r = 2ak$$

et

$$w = -\frac{2g}{a}\sin\theta\, e^{-2ak\theta};$$

d'où

$$\int w\,d\theta = \frac{2g}{a}\,\frac{\cos\theta + 2ak\sin\theta}{1+4a^2k^2}\,e^{-2ak\theta} + C,$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = Ce^{2ak\theta} + \frac{2g}{a}\,\frac{\cos\theta + 2ak\sin\theta}{1+4a^2k^2}.$$

Nous déterminons la constante C par la condition que $\frac{d\theta}{dt}$ soit nul pour $\theta = c$; alors

$$(2)\left\{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{a(1+4a^2k^2)}\left[\cos\theta + 2ak\sin\theta - (\cos c + 2ak\sin c)e^{-2ak(c-\theta)}\right].\right.$$

Cette formule nous permet de calculer les amplitudes des oscillations successives. En effet, soit $-c_1$ la valeur de l'angle θ à la fin de la première demi-oscillation ascendante; cette valeur devra vérifier l'équation

$$(\cos c_1 - 2ak\sin c_1)e^{2akc_1} - (\cos c + 2ak\sin c)e^{-2akc} = 0.$$

Si l'on développe les exponentielles suivant les puissances de k et que l'on néglige le carré de cette résistance supposée très-petite, on aura

$$\cos c_1 - 2ak(\sin c_1 - c_1\cos c_1) = \cos c + 2ak(\sin c - c\cos c).$$

La valeur de c_1 qui vérifie cette équation diffère très-peu de c; posant donc

$$c_1 = c - \delta,$$

nous pourrons négliger δ^2 et $k\delta$; nous aurons

$$\delta \sin c = 4ak(\sin c - c\cos c);$$

d'où

$$c_1 = c - \frac{4ak}{\sin c}(\sin c - c\cos c).$$

Ce résultat ne suppose pas les oscillations très-petites; mais, si elles sont assez petites pour que l'on puisse négliger la quatrième puissance de c dans la valeur de c_1, cette valeur se réduira à

$$c_1 = c - \frac{4c^3ak}{3}.$$

Pour trouver la durée des oscillations, on peut résoudre l'équation (2) par rapport à dt, puis intégrer; alors on obtient une expression de la forme

$$t = \int F(\theta)\,d\theta.$$

Cette intégrale n'est point exprimable en quantités finies, au moins par les méthodes connues. On pourrait la calculer par approximation, mais il est plus commode d'appliquer les méthodes approchées à l'équation primitive elle-même. C'est ce que nous allons faire en supposant les oscillations très-petites.

Nommons encore c la valeur initiale de l'angle θ, qui sera très-petite, et admettons que la vitesse initiale soit nulle. Il est clair que l'expression cherchée de l'angle θ est une fonction continue de c et s'évanouit avec cet angle; par conséquent elle peut se développer en une série de la forme

$$(3) \qquad \theta = c\theta_1 + c^2\theta_2 + \ldots;$$

et cette série sera d'autant plus convergente que c sera plus petit. Nous nous bornerons aux deux premiers

termes, qui sont bien suffisants pour représenter les expériences les plus délicates; toutefois la méthode sera générale.

Substituons dans l'équation (1) les valeurs de $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, $\frac{d\theta^2}{dt^2}$ et $\sin\theta$ que l'on tire de la formule (3) lorsque l'on néglige les troisièmes puissances de c, puis égalons séparément à zéro les coefficients de c et de c^2. Il vient

$$(4)\qquad \frac{d^2\theta_1}{dt^2}+\frac{g}{a}\theta_1=0,\quad \frac{d^2\theta_2}{dt^2}+\frac{g}{a}\theta_2-ak\frac{d\theta_1^2}{dt^2}=0.$$

La première de ces équations nous donne l'intégrale

$$\theta_1=A\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+B\right),$$

dans laquelle les constantes A et B se déterminent par la condition que, pour $t=0$, on ait

$$\theta=c,\quad \frac{d\theta}{dt}=0,$$

et, par suite (3),

$$\theta_1=1,\quad \frac{d\theta_1}{dt}=0.$$

On trouve ainsi

$$\theta_1=\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right).$$

Substituant cette valeur dans la seconde équation (4), il vient

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2}+\frac{g}{a}\theta_2-\frac{kg}{2}+\frac{kg}{2}\cos\left(2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)=0.$$

C'est une équation linéaire du second ordre, on l'intègre par la méthode que nous avons rappelée plus haut. Des exponentielles imaginaires s'introduisent, on les remplace

par des sinus et des cosinus, et l'on trouve enfin

$$\theta_2 = \mathrm{D}\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{a}} + \mathrm{E}\right) + \frac{ak}{2} + \frac{ak}{6}\cos\left(2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right).$$

D et E sont des constantes que l'on détermine de manière que, pour $t = 0$, on ait

$$\theta_2 = 0, \quad \frac{d\theta_2}{dt} = 0;$$

alors on obtient

$$\theta_2 = -\frac{2ak}{3}\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right) + \frac{ak}{2} + \frac{ak}{6}\cos\left(2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right);$$

d'où

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \theta = &\left(c - \frac{2c^2ak}{3}\right)\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right) + \frac{c^2ak}{2} \\ &+ \frac{c^2ak}{6}\cos\left(2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right), \end{aligned}\right.$$

et

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} v = -a\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{3}\sqrt{ag}\Bigg[&(3 - 2cak)\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right) \\ &+ cak\sin\left(2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

Ces valeurs vont nous donner la durée et l'amplitude des oscillations; dans cette recherche, nous pousserons l'approximation jusqu'aux secondes puissances de c inclusivement.

La durée de la demi-oscillation descendante s'obtient en résolvant par rapport à t l'équation $\theta = 0$, dans laquelle θ est remplacé par sa valeur (5). Une première valeur approchée est

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}};$$

car cette valeur annule le terme qui est du premier degré

par rapport à c. Posant donc

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} + u,$$

on déterminera u par la méthode de Newton, qui consiste à prendre pour u le quotient changé de signe de θ par sa dérivée relative à t, dans lequel on fait

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

On trouve ainsi

$$u = \frac{cak}{3}\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1 - \frac{2cak}{3}\right)^{-1} = \frac{cak}{3}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Il est inutile de prendre ici le terme en c^2 et de pousser l'approximation plus loin; car u doit évidemment changer de signe avec k, et comme dans toute la suite des calculs que l'on pourrait faire, c serait toujours accompagné du facteur k, il faut que u ne contienne que des puissances impaires de c. La durée de la demi-oscillation descendante est donc

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{cak}{3}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Pour obtenir la durée d'une oscillation entière, il faut résoudre par rapport à t l'équation $v = 0$, dans laquelle v est remplacé par sa valeur (6). En opérant de la même manière, on trouve, au même degré d'approximation, que cette durée est $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, comme dans le vide.

Nous aurons l'amplitude de la première demi-oscillation ascendante, si nous posons

$$t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

dans la valeur (5) de l'angle θ changée de signe. Nous

trouvons

$$\theta = c - \frac{4c^2ak}{3};$$

d'où nous voyons que l'amplitude de la seconde demi-oscillation est plus petite que celle de la première, de la quantité $\frac{4c^2ak}{3}$, comme nous l'avons déjà trouvé par une autre méthode.

Tous ces résultats coïncident à peu de chose près avec ceux que nous avons obtenus au problème précédent, dans l'hypothèse d'une résistance proportionnelle à la vitesse; les petites différences qui existent peuvent être attribuées aux valeurs différentes que le coefficient k doit recevoir dans ces deux hypothèses.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que le corps du pendule était un point matériel sans volume. Dans la réalité, il ne peut en être ainsi. Comme un corps plongé dans un fluide y perd une partie de son poids égale à celui du fluide déplacé, le pendule se trouve dans le même cas que si la gravité, au lieu d'être égale à g, était égale à $g(1-\rho)$, ρ désignant le rapport de la densité du fluide à celle du corps. Par là on verra facilement que, d'après la seule considération de la perte de poids à l'état de repos, la durée des oscillations dans un fluide se trouve augmentée dans le rapport de l'unité à $\sqrt{1-\rho}$ pour un même pendule, et la longueur du pendule simple se trouve diminuée dans le rapport de $1-\rho$ à l'unité pour la même durée.

De plus, Bessel a fait voir par l'expérience que la perte de poids est moins considérable pour un corps en repos que pour un corps animé d'un mouvement oscillatoire. Il en résulte que, dans les résultats précédents, il faut multiplier ρ par un facteur f plus grand que l'unité.

Poisson a démontré, dans son *Mémoire sur les mouve-*

ments simultanés d'un pendule et de l'air environnant (*), que le facteur f est indépendant de la densité du pendule ainsi que de la densité et de la nature du fluide dans lequel il oscille. Pour le cas d'une sphère dont le diamètre est petit relativement à la longueur du pendule, il trouve

$$f = \frac{3}{2}.$$

POISSON, *Traité de Mécanique*, 2e édit., t. I, p. 353.

4. *Trouver les courbes tautochrones pour un point pesant dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse.*

Soient :

O l'extrémité des arcs qui sont parcourus dans le même temps;

x la distance du mobile au-dessus de l'horizontale qui passe au point O;

s l'arc de la courbe compté à partir du point O;

h la hauteur à laquelle serait due dans le vide la vitesse que le mobile possède au point O;

k la résistance du milieu pour l'unité de vitesse.

On a

$$v\,dv = -g\,dx + kv^2\,ds.$$

ou, si l'on multiplie par $2e^{-2ks}$ et que l'on intègre,

$$(1) \qquad v^2 e^{-2ks} = 2g\left(h - \int_0^x e^{-2ks}\,dx\right).$$

Remplaçons v par sa valeur $-\frac{ds}{dt}$, et posons

$$(2) \qquad u = \int_0^x e^{-2ks}\,dx;$$

(*) *Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris*, t. XI.

x sera une fonction de u, et comme s est une fonction de x, nous pourrons poser encore

$$(3) \qquad e^{-ks}\,ds = \varphi(u)\,du.$$

Il vient alors

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{h-u}};$$

en sorte que le temps employé par le mobile pour arriver au point O est

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{h-u}}.$$

Cette valeur de τ doit être indépendante de h; d'où il suit que la quantité comprise sous le signe $\int$ doit être de degré zéro par rapport à h, u et du. Cela exige que l'on ait

$$\varphi(u) = \frac{a}{\sqrt{u}},$$

a désignant une constante.

Substituons cette valeur dans l'équation (3), et intégrons en observant que s et u sont nuls en même temps. Il vient

$$\frac{1}{k}(1-e^{-ks}) = 2a\sqrt{u},$$

$$\frac{1}{k}(1-e^{-ks})\,e^{-ks} = 2a^2\frac{du}{ds}.$$

Or, d'après l'équation (2),

$$\frac{du}{ds} = e^{-2ks}\frac{dx}{ds};$$

par conséquent,

$$2a^2k\frac{dx}{ds} = e^{ks} - 1.$$

D'un autre côté, nous avons

$$\tau = \frac{a}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{du}{\sqrt{hu - u^2}} = \frac{\pi a}{\sqrt{2g}};$$

donc enfin l'équation de la courbe tautochrone est

$$(4) \qquad 4gk\tau^2 \frac{dx}{ds} = \pi^2 (e^{ks} - 1),$$

$$4gk^2\tau^2 x + \pi^2 ks = \pi^2 (e^{ks} - 1).$$

On peut obtenir la valeur de l'arc parcouru pendant le temps t. En effet, soit s_0 la valeur initiale de l'arc s. La formule (1) peut s'écrire

$$e^{-2ks} \frac{ds^2}{dt^2} = 2g \int_s^{s_0} e^{-2ks} \frac{dx}{ds} ds;$$

et si nous remplaçons $\frac{dx}{ds}$ par sa valeur tirée de l'équation (4), il vient

$$e^{-2ks} \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{\pi^2}{2k\tau^2} \int_s^{s_0} e^{-ks} (1 - e^{-ks}) ds$$

$$= \frac{\pi^2}{4k^2\tau^2} [(1 - e^{-ks_0})^2 - (1 - e^{-ks})^2].$$

Posant

$$1 - e^{-ks} = z, \quad 1 - e^{-ks_0} = z_0,$$

cette équation nous donne

$$dt = -\frac{2\tau}{\pi} \frac{dz}{\sqrt{z_0^2 - z^2}},$$

$$t = \frac{2\tau}{\pi} \text{arc cos} \frac{z}{z_0}, \quad z = z_0 \cos \frac{\pi t}{2\tau},$$

$$1 - e^{-ks} = (1 - e^{-ks_0}) \cos \frac{\pi t}{2\tau},$$

$$s = -\frac{1}{k} \log \left[1 - (1 - e^{-ks_0}) \cos \frac{\pi t}{2\tau} \right].$$

EULER, *Comment. Petrop.*, 1729. — *Mechan.*, t. II, p. 392.

5. *Proposons-nous de rechercher l'expression la plus générale de la force tangentielle dans le mouvement tautochrone.*

Soient :

O l'extrémité des arcs de la courbe tautochrone qui doivent être parcourus dans le même temps τ;

F la résultante des forces tangentielles qui agissent sur le mobile au bout du temps t, compté à partir de l'instant du départ;

v la vitesse du mobile au bout du même temps;

s l'arc qui lui reste à parcourir pour arriver au point O;

σ la valeur initiale de l'arc s.

On a

$$\tau = -\int_0^\sigma \frac{1}{v}\, ds,$$

et la courbe sur laquelle se meut le corps sera tautochrone quand τ sera indépendant de σ, c'est-à-dire quand on aura

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = 0.$$

Éliminons σ des limites de l'intégrale. Pour cela, posons

$$(1) \qquad z = uZ,$$

en nommant z une fonction arbitraire de s, qui s'annule avec s, Z la valeur de z pour $s = \sigma$ et u une nouvelle variable.

Soit de plus

$$s = \psi(uZ)$$

la valeur de s que l'on déduit de l'équation (1).

Nous aurons

$$\tau = -\int_0^1 \frac{\psi'(uZ)Z}{\nu}\,du.$$

Différentions par rapport à σ, et souvenons-nous que ν est une fonction de σ et de $\psi(uZ)$; il viendra

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = -\int_0^1 \frac{[\psi''(uZ)uZZ' + \psi'(uZ)Z']\nu - \left[\frac{d\nu}{d\psi}\psi'(uZ)uZ' + \frac{d\nu}{d\sigma}\right]\psi'(uZ)Z}{\nu^2}\,du,$$

ou bien, remplaçant uZ par z et Zdu par $\frac{dz}{ds}ds$,

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = -\frac{1}{Z}\int_0^\sigma \frac{[\psi''(z)zZ' + \psi'(z)Z']\nu - \left[\frac{d\nu}{ds}\psi'(z)zZ' + \frac{d\nu}{d\sigma}Z\right]\psi'(z)}{\nu^2}\frac{dz}{ds}\,ds;$$

ce qu'on peut écrire

$$(2) \qquad \frac{d\tau}{d\sigma} = -\frac{1}{Z}\int_0^\sigma f(s, \sigma)\,ds,$$

en représentant par $f(s, \sigma)$ le facteur de ds sous le signe d'intégration.

Pour que $\frac{d\tau}{d\sigma}$ soit nul, quel que soit σ, il faut qu'en posant

$$\int_0^s f(s, \sigma)\,ds = \theta(s, \sigma),$$

on ait

$$\theta(s, \sigma) = 0.$$

Supposons que la fonction θ satisfasse à cette condition. Nous pourrons remplacer dans l'équation (2), $f(s, \sigma)$ par $\theta'_s(s, \sigma)$ et $\frac{d\tau}{d\sigma}$ par la valeur trouvée précédemment; alors, si nous observons que l'on a

$$\frac{dz}{ds} = \frac{1}{\psi'(z)}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = -\frac{\psi''(z)}{[\psi'(z)]^2}\frac{1}{\psi'(z)},$$

ou

$$\psi'(z) = \frac{1}{z'_s}, \quad \frac{\psi''(z)}{\psi'(z)} = -\frac{z''_s}{z'^2_s},$$

il viendra

$$(3) \quad \frac{Z\,dv}{d\sigma} + \frac{Z'z}{z'_s}\frac{dv}{ds} - \left(1 - \frac{zz''_s}{z'^2_s}\right) Z'v + \theta'_s(s, \sigma)\, v^2 = 0.$$

Il nous faut intégrer cette équation, dans laquelle v est la fonction et s, σ les variables indépendantes. On sait qu'elle se ramène aux deux équations différentielles simultanées

$$\frac{d\sigma}{\frac{Z}{Z'}} = \frac{ds}{\frac{z}{z'_s}} = \frac{dv}{v\left(1 - \frac{zz''_s}{z'^2_s}\right) - \frac{v^2}{Z'}\theta'_s(s, \sigma)}.$$

Posons

$$\frac{z}{z'_s} = \varphi(s),$$

d'où

$$1 - \frac{zz''_s}{z'^2_s} = \varphi'(s), \quad \frac{Z}{Z'} = \varphi(\sigma), \quad \frac{1}{Z'} = \varphi(\sigma)\, e^{-\int \frac{d\sigma}{\varphi(\sigma)}}.$$

Nos équations différentielles pourront s'écrire

$$\frac{ds}{\varphi(s)} = \frac{d\sigma}{\varphi(\sigma)},$$

$$\frac{dv}{ds} = v\,\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} - v^2\,\frac{\varphi(\sigma)\, e^{-\int \frac{d\sigma}{\varphi(\sigma)}}}{\varphi(s)}\,\theta'_s(s, \sigma).$$

Soit

$$\int \frac{ds}{\varphi(s)} = \omega(s).$$

La première équation nous donne

$$\omega(\sigma) - \omega(s) = \text{const.} = A;$$

d'où l'on tirera une valeur de σ de la forme

$$\sigma = \zeta(s).$$

Si l'on substitue cette valeur dans la seconde équation différentielle, et que l'on pose ensuite

$$v = x\varphi(s),$$

x étant une variable auxiliaire, on obtient l'équation

$$-\frac{dx}{x^2} = \frac{e^{-\omega[\zeta(s)]}}{\omega'_\zeta[\zeta(s)]}\theta'_s[s, \zeta(s)]\,ds,$$

où $\theta'_s[s, \zeta(s)]$ représente ce que devient la dérivée de $\theta(s, \sigma)$ par rapport à s, lorsqu'on y fait, après la différentiation, $\sigma = \zeta(s)$.

Soit $\rho(s)$ l'intégrale indéfinie du second membre. On aura

$$\frac{1}{x} = \rho(s) + \text{const.} = \rho(s) + \frac{1}{B},$$

$$v = \frac{B\varphi(s)}{B\rho(s) + 1}, \quad B = \frac{v}{\varphi(s) - v\rho(s)}.$$

Il résulte de là que l'intégrale générale de l'équation (3) est

$$\omega(\sigma) - \omega(s) = \gamma\left[\frac{v}{\varphi(s) - v\rho(s)}\right],$$

γ étant le signe d'une fonction arbitraire. Toutefois les conditions de notre problème assujettissent cette fonction γ à être identiquement nulle, lorsque l'on y fait simultanément

$$s = \sigma \quad \text{et} \quad v = 0;$$

car la vitesse initiale du mobile est supposée nulle.

Différentions la dernière équation par rapport à s, et

remplaçons $\omega'_s(s)$ par sa valeur $\frac{1}{\varphi(s)}$; il vient

$$-\frac{1}{\varphi(s)} = \gamma'\left[\frac{v}{\varphi(s) - v\rho(s)}\right]\frac{\varphi(s)\frac{dv}{ds} - v\varphi'(s) + v^2\rho'(s)}{[\varphi(s) - v\rho(s)]^2}.$$

On en tire

$$-v\frac{dv}{ds} = \mathrm{F} = v\frac{\left[1 - v\frac{\rho(s)}{\varphi(s)}\right]^2}{\gamma'\left[\frac{v}{\varphi(s) - v\rho(s)}\right]} - v^2\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} + v^3\frac{\rho'(s)}{\varphi(s)},$$

ou, si l'on pose $\frac{\left[\frac{\varphi(s)}{v} - \rho(s)\right]^2}{\gamma'\left[\frac{1}{\frac{\varphi(s)}{v} - \rho(s)}\right]} = \mathrm{G}\left[\frac{\varphi(s)}{v} - \rho(s)\right]$,

$$(4)\quad \mathrm{F} = \frac{v^3}{[\varphi(s)]^2}\left\{\mathrm{G}\left[\frac{\varphi(s)}{v} - \rho(s)\right] - \varphi(s)\left[\frac{\varphi'(s)}{v} - \rho'(s)\right]\right\}.$$

Telle est la formule cherchée. G et φ représentent des fonctions arbitraires; ρ est aussi une fonction arbitraire.

En effet $\rho'(s)$ et par suite $\rho(s)$ sont définis par l'équation

$$\rho'(s)\,\omega'_\zeta[\zeta(s)]\,e^{\omega[\zeta(s)]} = \theta'_s[s, \zeta(s)],$$

et, puisque la fonction θ n'est assujettie qu'à la seule condition de s'évanouir pour $s = \sigma$, nous pouvons prendre

$$\theta(s, \sigma) = (s - \sigma)\,\chi(\sigma),$$

$\chi(\sigma)$ étant indépendant de s; alors le second membre de l'équation précédente se réduit à

$$\chi[\zeta(s)].$$

D'ailleurs le premier membre peut s'exprimer en $\zeta(s)$,

quelle que soit la fonction $\rho(s)$, puisque s est une fonction de $\zeta(s)$. Prenant cette expression du premier membre pour la fonction $\chi[\zeta(s)]$ qui est à volonté, l'équation sera satisfaite.

Supposons, en particulier, que l'on prenne

$$\rho(s) = 0;$$

et posons, pour abréger,

$$\varphi(s) = \xi,$$

$$\frac{v}{\xi} G\left(\frac{\xi}{v}\right) = \varpi\left(\frac{v}{\xi}\right).$$

La formule générale (4) pourra s'écrire

$$F = \frac{v^2}{\xi}\left[\varpi\left(\frac{v}{\xi}\right) - \frac{d\xi}{ds}\right],$$

ϖ étant le signe d'une fonction arbitraire.

Cette dernière formule a été donnée par Lagrange, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1765, 1770. La formule générale d'où elle dérive a été établie récemment par M. Brioschi (*).

6. Comme application des formules que nous venons d'établir, nous nous proposons ici de *chercher tous les cas de tautochronisme contenus dans la formule de Lagrange, et relatifs à un corps pesant qui se meut avec frottement dans un milieu dont la résistance est une fonction quelconque de la vitesse, $f(v)$.*

Supposons l'axe des x vertical et dirigé en sens contraire de la pesanteur; et soit μ le coefficient de frottement.

La composante tangentielle de la pesanteur et la pres-

(*) *Annali di Scienze matematiche e fisiche compilati da* B. Tortolini; Roma, 1853, p. 62.

sion sur la courbe seront respectivement

$$g\frac{dx}{ds},$$

$$g\sqrt{1-\frac{dx^2}{ds^2}}+\frac{v^2\frac{d^2x}{ds^2}}{\sqrt{1-\frac{dx^2}{ds^2}}};$$

en sorte que l'on aura, pour l'expression générale de la force tangentielle,

$$(\mathrm{V})\quad \mathrm{F}=g\frac{dx}{ds}-\mu g\sqrt{1-\frac{dx^2}{ds^2}}-\mu v^2\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\sqrt{1-\frac{dx^2}{ds^2}}}-f(v).$$

$\frac{dx}{ds}$ est ici une fonction de s qui, si elle était connue, donnerait l'équation de la courbe. Nous allons déterminer cette fonction par la condition que la formule (V) soit comprise dans celle de Lagrange.

Si l'on différentie la valeur (V) trois fois par rapport à v, puis une fois par rapport à s, le résultat est identiquement nul. Exprimons que la formule de Lagrange satisfait à cette condition.

Si nous posons

$$\frac{v}{\xi}\varpi\left(\frac{v}{\xi}\right)=\chi\left(\frac{v}{\xi}\right),\quad \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{ds}=\varphi(\xi),$$

la formule de Lagrange prend la forme

$$\mathrm{F}=v\chi\left(\frac{v}{\xi}\right)-v^2\varphi(\xi);$$

et l'on doit avoir

$$\frac{d^4\mathrm{F}}{dv^3\,ds}=0,$$

ou, puisque ξ est une fonction de s,

$$\frac{d^4 F}{dv^3\, d\xi} = 0.$$

Cette condition nous donne

$$\frac{v^2}{\xi^4}\chi^{(\text{IV})}\left(\frac{v}{\xi}\right) + \frac{6v}{\xi^4}\chi'''\left(\frac{v}{\xi}\right) + \frac{6}{\xi^3}\chi''\left(\frac{v}{\xi}\right) = 0.$$

Posons

$$\frac{v}{\xi} = z, \quad \chi''(z) = \psi(z);$$

l'équation précédente deviendra

$$z^2\psi''(z) + 6z\psi'(z) + 6\psi(z) = 0.$$

Pour l'intégrer, posons encore

$$z^3\psi(z) = u.$$

Nous obtenons

$$u'' = 0;$$

par conséquent,

$$u = Az + B,$$

$$\psi = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z^3},$$

$$\chi = -A\log z + \frac{1}{2}Bz^{-1} + Cz + D,$$

$$F = -Av\log\frac{v}{\xi} + \frac{1}{2}B\xi + \frac{1}{\xi}\left(C - \frac{d\xi}{ds}\right)v^2 + Dv,$$

A, B, C, D désignant des constantes arbitraires.

Pour que cette valeur soit identique avec la valeur (V),

il faut que l'on ait

$$A = 0, \quad D\varphi = -f(\varphi),$$

$$\frac{1}{2}B\xi = g\frac{dx}{ds} - \mu g\sqrt{1 - \frac{dx^2}{ds^2}},$$

$$\frac{1}{\xi}\left(C - \frac{d\xi}{ds}\right) = -\frac{\mu\frac{d^2x}{ds^2}}{\sqrt{1 - \frac{dx^2}{ds^2}}}.$$

La seconde relation nous montre que la résistance du milieu doit être simplement proportionnelle à la vitesse. Si l'on élimine ξ entre les deux dernières relations, on obtient, toutes réductions faites,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\frac{BC}{2g}}{1 + \mu^2} = \text{const.},$$

ce qui est l'équation d'une cycloïde.

Ainsi, *la cycloïde est tautochrone avec frottement, soit dans le vide, soit dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la vitesse;* c'est d'ailleurs le seul cas de tautochronisme avec frottement qui soit donné par la formule de Lagrange (*).

Si l'on nomme r le rayon du cercle générateur de la cycloïde et H une constante, on aura

$$\frac{dx}{ds} = \frac{gs + H}{4r}.$$

La constante H se déterminera par la condition que le mobile, placé sans vitesse initiale à l'extrémité des arcs tau-

(*) Ce cas de tautochronisme a été signalé la première fois par Necker, *Recueil des Savants étrangers* (Académie des Sciences de Paris), t. IV, 96; 1763.

tochrones, y reste en équilibre, et que, placé un peu plus haut, l'équilibre n'ait pas lieu. Cela exige que l'extrémité des arcs tautochrones soit le point le plus élevé de ceux où le point matériel, posé sans vitesse, pourrait rester en équilibre.

7. *Trouver tous les cas de tautochronisme contenus dans la formule de Lagrange* (prob. 5), *et relatifs à un point pesant qui se meut dans un milieu dont la résistance est une fonction de la vitesse*, $f(v)$.

Un calcul semblable à celui du numéro précédent montre que la résistance $f(v)$ doit être de la forme

$$A + Bv + Cv^2,$$

A, B, C désignant des constantes.

Alors la courbe tautochrone est celle que nous avons obtenue au problème 4.

Ceci est un cas particulier du théorème suivant : Toute courbe tautochrone pour une force comprise dans la formule de Lagrange, est encore tautochrone lorsqu'on ajoute à la force un terme proportionnel à la vitesse (*). On voit, en effet, qu'en conservant la même courbe et ajoutant à la force tangentielle un terme proportionnel à la vitesse, l'expression de la force tangentielle totale reste encore comprise dans la formule de Lagrange; car le terme additionnel n'a d'autre effet que d'augmenter la fonction arbitraire $\varpi\left(\frac{v}{\xi}\right)$ d'un terme de la forme $\frac{\xi}{v} \times$ const.

J. Bertrand, *Journal de M. Liouville*, 1847, t. XII, p, 126.

8. *Un point pesant monte, en vertu d'une impulsion*

(*) Lagrange, *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1765, p. 371.

initiale, sur une courbe située dans un plan vertical; le mouvement a lieu dans un milieu homogène dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. Quelle doit être la courbe pour que la vitesse du mobile égale à chaque instant celle qui serait due, dans le même milieu, à la hauteur mesurée par la longueur de l'arc qui lui reste à parcourir pour atteindre un point fixe situé sur la courbe?

Soit s l'arc de la courbe compté à partir du point fixe, x la distance de l'extrémité de cet arc à l'horizontale qui passe au point fixe, et k la résistance du milieu pour l'unité de vitesse.

L'équation de la courbe est

$$k(x+s) = 1 - e^{-2kx}.$$

Ce problème fut proposé à Clairaut, pendant son voyage en Laponie, par un professeur d'Upsal nommé Klingstierna. La solution de Clairaut se trouve dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1740, p. 254.

9. *D'un même point* O *partent une infinité de droites situées dans un même plan vertical et terminées à une courbe* S. *Déterminer cette courbe de manière qu'un point pesant, descendant du point* O *sur l'une des droites, arrive sur la courbe avec une même vitesse, quelle que soit la droite que l'on ait choisie. Le mouvement a lieu dans un milieu homogène dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse.*

Rapportons la courbe à des coordonnées polaires r, θ, dont l'origine soit au point O, et dont l'axe soit dirigé dans le sens de la pesanteur; nommons a le rayon vecteur qui se compte sur l'axe.

L'équation de la courbe est

$$\cos\theta = \frac{1 - e^{-2ka}}{1 - e^{-2kr}}.$$

EULER, *Mechan.*, t. II, p. 251.

10. *Les données restant les mêmes que dans le problème précédent, on propose de déterminer la courbe* S *par la condition que le mobile emploie le même temps pour l'atteindre, quelle que soit la droite sur laquelle il descende.*

L'équation de la courbe est

$$\sqrt{\cos\theta} = \frac{\log\left[e^{kr} + (e^{2kr} - 1)^{\frac{1}{2}}\right]}{\log\left[e^{ka} + (e^{2ka} - 1)^{\frac{1}{2}}\right]},$$

EULER, *Mechan.*, t. II, p. 256.

SECTION IV.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE SURFACE FIXE.

Soient

x, y, z les coordonnées du mobile à l'époque t;

v la vitesse;

X, Y, Z les composantes de la force accélératrice extérieure parallèles aux axes;

$F(x, y, z) = \text{const.}$ l'équation de la surface;

R la réaction normale que cette surface exerce sur le point.

Si l'on pose, pour abréger,

$$U = \frac{\pm 1}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}},$$

les équations du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + RU\frac{dF}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y + RU\frac{dF}{dy},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z + RU\frac{dF}{dz}.$$

Pour déterminer la position du mobile à une époque quelconque, il faut éliminer le produit RU entre les trois équations précédentes; alors on aura deux équations différentielles entre x, y, z, t, qui, jointes à l'équation de la surface, détermineront les coordonnées en fonction du temps.

Lorsque $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est la différentielle exacte d'une certaine fonction $\varphi(x, y, z)$ des seules variables x, y, z, on a de suite une intégrale première,

$$v^2 - v_0^2 = 2[\varphi(x, y, z) - \varphi(x_0, y_0, z_0)],$$

v_0, x_0, y_0, z_0 étant les valeurs de v, x, y, z qui correspondent à l'état initial. Cette intégrale pourra remplacer une des trois équations primitives, et comme

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2},$$

elle permettra de faire disparaître dt des deux équations restantes. Dès lors il suffira d'éliminer entre ces dernières équations le produit RU pour avoir une équation différentielle en x, y, z qui déterminera la trajectoire conjointement avec l'équation de la surface.

1. *D'un point pris à volonté sur l'un des méridiens d'une surface de révolution dont l'axe est vertical, on lance un point pesant suivant la tangente au parallèle, avec une vitesse qui est une fonction connue des coor-*

données du point de départ. Déterminer la surface par la condition que le mobile, assujetti à rester dans son intérieur, décrive toujours un parallèle, quel que soit le point de départ.

Soit pris le plan méridien d'où part le mobile pour plan des xz, et l'axe de révolution pour l'axe des z, qui sera dirigé en sens contraire de la pesanteur.

Nous avons

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -g\,dz;$$

d'où il résulte que la vitesse doit être constante pendant toute la durée du mouvement; par suite, la résultante de la pesanteur et de la force centrifuge doit être normale à la surface.

Ainsi, x et z étant les coordonnées du point de départ, et $\sqrt{2gf(z,x)}$ la vitesse initiale, nous devons avoir

$$\frac{2gf(z,x)}{x} = g\frac{dz}{dx}, \quad \text{ou} \quad f(z,x) = \frac{x}{2}\frac{dz}{dx}.$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe méridienne. Elle nous montre que la hauteur due à la vitesse initiale est égale à la moitié de la sous-tangente à la courbe.

Donnons à la fonction f quelques valeurs particulières.

Soit

$$f = \text{const.} = h.$$

On a

$$\frac{2\,h\,dx}{x} = dz,$$

$$\log x = \frac{z}{2h} + \text{const.}$$

La courbe est une *logarithmique*.

Soit

$$f = \frac{x^2}{2a}.$$

On a

$$\frac{x}{a} = \frac{dz}{dx},$$

$$x^2 = 2az + \text{const.}$$

La courbe est une *parabole*.

Soit

$$f = \frac{z^n}{a^{n-1}}.$$

On a

$$\frac{2\,dx}{x} = \frac{a^{n-1}\,dz}{z^n},$$

$$2\log x = -\frac{a^{n-1}}{(n-1)\,z^{n-1}} + \text{const.}$$

Si l'on veut que le temps d'une révolution soit le même sur chacun des parallèles; alors, nommant T la durée d'une révolution, on aura

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi x}{\sqrt{2gf(z,x)}}, \quad f(z,x) = \frac{2\pi^2 x^2}{g\mathrm{T}^2};$$

par conséquent la courbe méridienne sera la *parabole*

$$x^2 = \frac{g\mathrm{T}^2}{2\pi^2}\,z + \text{const.}$$

FONTANA, *Dissertazione sopra la forza centrifuga*; Verona, 1784.

2. *Trouver une surface passant par une courbe donnée et telle, qu'un point pesant parcoure cette courbe, lorsqu'on le pose sur la surface en un point de la courbe, et qu'on lui imprime une vitesse de grandeur et de direction convenables.*

Supposons l'axe des z dirigé dans le sens de la pesanteur.

Soient

$$x = f(z), \quad y = f_1(z)$$

les équations de la courbe donnée.

La surface cherchée aura son équation de la forme

$$F = x - f(z) - [y - f_1(z)]\,\varphi(y, z) = 0,$$

φ étant une fonction qui ne devient pas infinie pour $y = f_1(z)$.

Il s'agit de déterminer cette fonction φ.

Tout point pesant (x, y, z), posé sur la surface, vérifiera dans son mouvement les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{RU}\frac{dF}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{RU}\frac{dF}{dy},$$

desquelles on tire

$$\frac{dF}{dy}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dF}{dx}\frac{d^2y}{dt^2},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(1) \qquad \frac{dF}{dy}\,d.v\frac{dx}{ds} = \frac{dF}{dx}\,d.v\frac{dy}{ds}.$$

Pour que le point parcoure la courbe donnée, il faut que cette équation devienne identique quand on y fera

$$x = f(z), \quad y = f_1(z),$$

après avoir substitué à v, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ les valeurs de ces quantités relatives à un point qui serait assujetti à parcourir la courbe donnée.

Or

$$\frac{dF}{dx} = 1,$$

et quand on pose

$$y = f_1(z),$$

$\frac{dF}{dy}$ se réduit à $-\varphi[f_1(z), z]$; en sorte que la substitution de ces valeurs dans l'équation (1) donnera un résultat de la forme

$$(2) \qquad \varphi[f_1(z), z] = \Pi(z),$$

$\Pi(z)$ étant une fonction connue de z.

La fonction φ qui vérifie cette dernière équation est évidemment donnée par la formule

$$(3) \qquad \varphi(y, z) = \Pi(z) + [y - f_1(z)]\psi(y, z),$$

dans laquelle ψ représente une fonction arbitraire qui ne devient pas infinie pour $y = f_1(z)$.

De là il résulte que l'équation de la surface cherchée est

$$x = f(z) + [y - f_1(z)]\Pi(z) + [y - f_1(z)]^2\psi(y, z).$$

Comme application, nous supposerons que la courbe donnée soit une *hélice*,

$$x = r\cos\left(k\frac{z}{r}\right), \quad y = r\sin\left(k\frac{z}{r}\right).$$

Il nous sera plus commode de représenter cette courbe par les deux équations équivalentes

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0, \quad z - \frac{r}{k}\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = 0.$$

Alors l'équation de la surface sera de la forme

$$F = z - \frac{r}{k}\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} - (x^2 + y^2 - r^2)\varphi(x, y) = 0.$$

Si dans les dérivées partielles $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ on élimine x

et y à l'aide des équations de la courbe, on trouve

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{k}\sin\left(k\frac{z}{r}\right) - 2r\cos\left(k\frac{z}{r}\right)\varphi_1,$$

$$\frac{dF}{dy} = -\frac{1}{k}\cos\left(k\frac{z}{r}\right) - 2r\sin\left(k\frac{z}{r}\right)\varphi_1,$$

en posant

$$\varphi_1 = \varphi\left[r\cos\left(k\frac{z}{r}\right),\quad r\sin\left(k\frac{z}{r}\right)\right].$$

Supposons le mobile placé sans vitesse initiale au point dont les coordonnées sont

$$x = r,\quad y = 0,\quad z = 0.$$

Nous aurons, à un instant quelconque,

$$v = \sqrt{2gz},$$

$$dx = -k\sin\left(k\frac{z}{r}\right)dz,\quad dy = k\cos\left(k\frac{z}{r}\right)dz,\quad ds = \sqrt{k^2+1}\,dz.$$

D'après ces valeurs, l'équation (1) devient, toutes réductions faites,

$$\varphi\left[r\cos\left(k\frac{z}{r}\right),\quad r\sin\left(k\frac{z}{r}\right)\right] = -\frac{z}{r^2};$$

c'est l'équation qui correspond à la formule (2).

Selon la formule (3), nous aurons

$$\varphi(x,y) = -\frac{\text{arc tang}\frac{y}{x}}{rk} + (x^2+y^2-r^2)\psi(x,y),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varphi(x,y) = -\frac{\frac{r}{k}\,\text{arc tang}\frac{y}{x}}{x^2+y^2} + \frac{r^2(x^2+y^2-r^2)}{x^2+y^2}\psi(x,y);$$

car le second membre se réduit bien à $\Pi(z) = -\frac{z}{r^2}$, quand on y remplace x et y par leurs valeurs en z.

L'équation de la surface sera donc

$$z = \frac{r}{k} \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} + (x^2 + y^2 - r^2)\, \varphi(x, y),$$

ou, remplaçant $\varphi(x, y)$ par sa valeur,

$$z = \frac{r^3}{k} \frac{\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}}{x^2 + y^2} + \frac{r^3 (x^2 + y^2 - r^2)^2}{x^2 + y^2} \psi(x, y).$$

Si nous supposons $\psi = 0$, l'équation se réduit à

$$z = \frac{r^3}{k} \frac{\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}}{x^2 + y^2},$$

ou, posant $x = u \cos\omega$ et $y = u \sin\omega$,

$$z = \frac{r^3 \omega}{k u^2}.$$

La surface représentée par cette équation est assez remarquable ; les sections horizontales sont des spirales analogues à celle d'Archimède ; les sections faites par des cylindres de révolution autour de l'axe des z sont des hélices ; les sections faites par des plans passant par cet axe sont des courbes hyperboliques qui ont pour asymptotes l'axe des z et la trace du plan sécant sur le plan des xy ; la courbe de plus grande pente est représentée par l'équation

$$u = Ce^{-\omega^2}.$$

Il y a plus : quel que soit le point de l'axe des x sur lequel on place un point pesant, la trajectoire de ce point sera une hélice. C'est ce qu'on reconnaît aisément en prouvant

que toutes les hélices de la surface vérifient l'équation (1), si $v = \sqrt{2gz}$.

CATALAN, *Journal de M. Liouville*, t. XI, p. 212; 1846.

3. *Trouver l'équation générale de la courbe brachistochrone pour un point pesant assujetti à se mouvoir sur une surface quelconque. Examiner en particulier le cas d'une surface de révolution autour d'un axe vertical.*

Soient l'axe des z une verticale dirigée dans le sens de la pesanteur, z_0 et z_1 les ordonnées du point de départ et du point d'arrivée, et

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface.

Le mobile partant du repos, sa vitesse est donnée par la formule

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(z - z_0)};$$

par conséquent l'intégrale qu'il s'agit de rendre un minimum est

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{ds}{\sqrt{2g(z - z_0)}}.$$

Le problème consiste dans une simple application des formules du calcul des variations.

Nommons p et q les dérivées partielles $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ que l'on tire de l'équation de la surface, et posons

$$\frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\sqrt{2g(z - z_0)}} = V,$$

$$M = \frac{dV}{dx}, \quad N = \frac{dV}{dp}, \quad M' = \frac{dV}{dy}, \quad N' = \frac{dV}{dq},$$

les dérivées étant ici des dérivées partielles.

Pour que l'intégrale soit un minimum, il faut que les ordonnées x, y, z d'un point quelconque de la trajectoire, outre qu'elles vérifient l'équation de la surface, vérifient encore l'équation différentielle

$$\left(\mathrm{M} - \frac{d\mathrm{N}}{dz}\right)\frac{d\mathrm{F}}{dy} = \left(\mathrm{M}' - \frac{d\mathrm{N}'}{dz}\right)\frac{d\mathrm{F}}{dx},$$

dans laquelle $\frac{d\mathrm{N}}{dz}$, $\frac{d\mathrm{N}'}{dz}$ représentent des dérivées totales, prises en considérant x, y, p et q comme des fonctions de z.

Nous avons

$$\mathrm{M} - \frac{d\mathrm{N}}{dz} = \frac{d}{dz}\cdot\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{2g(z-z_0)}},$$

$$\mathrm{M}' - \frac{d\mathrm{N}'}{dz} = \frac{d}{dz}\cdot\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{2g(z-z_0)}};$$

en sorte que l'équation différentielle est

$$(1)\qquad \frac{d\mathrm{F}}{dy}d\cdot\frac{dx}{ds\sqrt{2g(z-z_0)}} = \frac{d\mathrm{F}}{dx}d\cdot\frac{dy}{ds\sqrt{2g(z-z_0)}}.$$

On pourra éliminer une des coordonnées x, y à l'aide de l'équation de la surface; alors on aura une équation différentielle du second ordre entre deux variables. L'intégrale de cette équation contiendra deux constantes arbitraires dont on disposera de manière que la courbe passe au point de départ et au point d'arrivée.

Dans le cas d'une *surface de révolution* autour de l'axe des z, on a

$$\mathrm{F} = x^2 + y^2 - \varphi(z),$$

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx} = 2x, \quad \frac{d\mathrm{F}}{dy} = 2y;$$

par suite l'équation (1) devient

$$y d \cdot \frac{dx}{ds\sqrt{z-z_0}} - x d \cdot \frac{dy}{ds\sqrt{z-z_0}} = 0.$$

L'intégrale première est

$$(2) \qquad y dx - x dy = ds\sqrt{z-z_0} \times \text{const.}$$

Si l'on substitue à x et à y les coordonnées polaires r et θ, liées par les relations

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

il vient

$$y dx - x dy = r^2 d\theta;$$

d'ailleurs,

$$\sqrt{z-z_0} = \frac{v}{\sqrt{2g}}, \quad ds\sqrt{z-z_0} = \frac{v^2 dt}{\sqrt{2g}};$$

par conséquent l'équation (2) peut s'écrire

$$r^2 d\theta = C v^2 dt,$$

C étant une constante.

Sous cette forme elle nous montre que l'aire décrite à chaque instant par la projection du rayon vecteur sur un plan horizontal est proportionnelle au carré de la vitesse du mobile.

La même équation nous fait voir que le rapport de v à $\frac{d\theta}{dt}$ augmente indéfiniment à mesure que v diminue ou que l'on considère un point plus rapproché du point de départ. Il en résulte que *toute brachistochrone sur une surface de révolution est tangente au méridien du point de départ.*

On a, pour toute époque,

$$\int_0^\theta d\theta = C\int_0^t \frac{v^2}{r^2} dt.$$

Or, si le point d'arrivée est sur le méridien du point de départ, le premier membre de cette équation est nul; d'ailleurs l'intégrale qui figure au second membre ne peut jamais être nulle, vu que tous ses éléments sont positifs; donc, dans ce cas, $C = 0$. On en conclut que, quand le point de départ et le point d'arrivée sont situés sur un même méridien, la brachistochrone entre ces deux points n'est pas autre chose que le méridien lui-même.

L'intégrale de l'équation (2) peut toujours se ramener à une quadrature. En effet cette équation peut s'écrire

$$r^2 d\theta = C\sqrt{z - z_0}\, ds;$$

or, si l'on pose

$$r = f(z),$$

d'où

$$ds = \sqrt{dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2} = \sqrt{[1 + f'(z)^2]dz^2 + f(z)^2 d\theta^2},$$

on pourra facilement la résoudre par rapport à $d\theta$, et en tirer l'intégrale

$$\theta - \theta_0 = C\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{f(z)} \sqrt{\frac{[1 + f'(z)^2](z - z_0)}{f(z)^2 - C^2(z - z_0)}}.$$

Lorsque la surface est un cylindre, la réaction qu'elle exerce sur le mobile, étant horizontale, n'a aucune influence sur la vitesse. Il en résulte que, si l'on développe le cylindre sur un plan vertical, la brachistochrone sur le cylindre restera brachistochrone sur le plan. Ainsi la première courbe a pour transformée une cycloïde.

ROGER, *Journal de M. Liouville*, t. XIII, p. 41; 1848.

4. *Déterminer le mouvement d'un point pesant lancé le long d'une surface qui est de révolution autour d'un axe vertical.*

Conservons la notation du problème précédent, et sui-